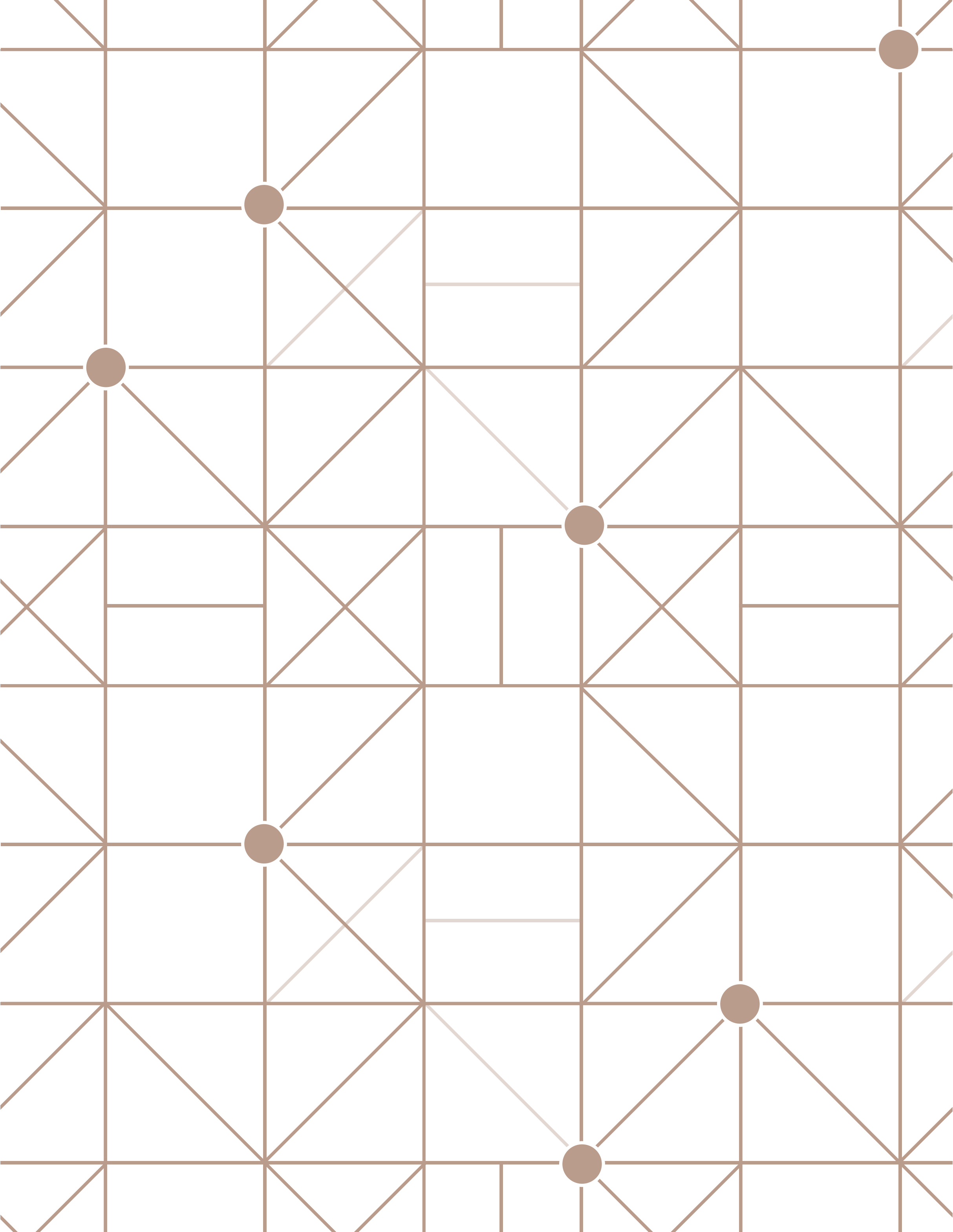


建模 ⟶ 求解 ⟶ 给出结论

期末 50%　期中 20%　作业等平时 30%.
鼓励互相交流讨论
及时解决问题

(一) 复变函数

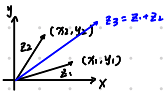
复数　$Z = x + iy$　$\boxed{i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1}$

$z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2 \longrightarrow z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

复数的表示

① 代数表示　$z = x + iy$

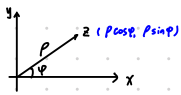
② 矢量表示



③ 极坐标表示

$\boxed{z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. 欧拉公式

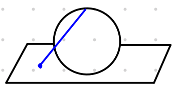


$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

定义：φ 为 z 的辐角. 记为 $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$
$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi$
称 $\arg z$ 为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值 或 z 的主辐角
$\arg z$ 介于 0 与 2π 之间　$[0, 2\pi)$

④ 测地投影

无限平面 ⟶ 有限球面



复数的共轭

$z = x + iy \longrightarrow z^* = x - iy$　(在复平面内将 z 关于 x 轴对称)

$z = \rho e^{i\varphi} \longrightarrow z^* = \rho e^{-i\varphi}$.

$(z^*)^* = z$　互为共轭

复数除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V(x)\psi$$

§ 1.2 复变函数

$y = f(x)$ ， $x \in R$

$\Downarrow$

$w = f(z)$ ， $z \in B$ B为区域（由实数域转为复数域）

$= u(x,y) + i\,v(x,y)$

区域的两个条件：☆
① 全由内点组成
② 具有连通性

边界点既不是内点也不是外点
组成的边界有方向
闭区域 = 区域 + 边界

复变函数举例：

(1) $w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$

(2) 有理式

$$W(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

(3) $\sqrt[k]{z - z_0}$

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi + 2n\pi)}$$

$$\sqrt[k]{z - z_0} = \sqrt[k]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{k} + \frac{2n\pi}{k}\right)}$$ 有多个可能值

由欧拉公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

$z = x + iy$

$$\cos z = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x)}{2} + \frac{e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2}$$

$$= u + iv = \frac{\cos x\,(e^{y} + e^{-y})}{2} - i\,\frac{\sin x\,(e^{y} - e^{-y})}{2}$$

$$\boxed{\begin{cases} u = \cos x \,\mathrm{ch}\, y \\ v = -\sin x \,\mathrm{sh}\, y \end{cases}}$$

☆ $\mathrm{ch}\, y = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$

$\mathrm{sh}\, y = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

$\sin^2 z + \cos^2 z \neq 1$

$|\sin z| \to \infty$

$\ln z$ 有无限多个值.

---

§ 1.3 复变函数的导数

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$z = x + iy$ 则有 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}$$ $\boxed{\text{必要条件}}$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

上述必要条件变为

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x + \Delta x, y) + i\,v(x + \Delta x, y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x, y + \Delta y) + i\,v(x, y + \Delta y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{i\Delta y}$$

同乘以 i（要变号）

化简得：$\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = -i\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

实虚部分别相等，应有

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}}$$

柯西-黎曼方程（C-R 条件）

复变函数可导的必要条件

不满足充分性的反例
$f(z) = \sqrt{xy}$
在 $(0,0)$ 处不可导，
尽管满足 C-R 条件

$z = \rho e^{i\varphi}$

$f(z) = u(\rho, \varphi) + i\,v(\rho, \varphi)$

上述必要条件 $\boxed{\lim\limits_{\substack{\Delta\rho \to 0 \\ \Delta\varphi = 0}} = \lim\limits_{\substack{\Delta\rho = 0 \\ \Delta\varphi \to 0}}}$

计算得：

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}}$$

函数 $f(z)$ 可导的充要条件
$f(z)$ 偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 都存在且连续，并且满足 C-R 方程

§1.4 解析函数

若 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点**解析**

又若 $f(z)$ 在区域 B 上每一点都解析，则称 $f(z)$ 是区域 B 上的**解析函数**　　区域中的点必须都有邻域

解析函数的性质

1. 若 $f(z)=u+iv$ 在 B 上解析，则 $u(x,y)=C_1$ 与 $v(x,y)=C_2$ 是 B 上的两组正交曲线族（C_1, C_2 为常数）等 u 线与等 v 线正交

证明：

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e_y}$$

梯度正交即法向量正交

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{e_y}$$

得证

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

由 C-R 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

代换

2. 若函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 B 上解析，则 u, v 均为 B 上的调和函数

$$\Delta u = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta v = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

（共轭调和函数）

存在二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程 $\Delta H = 0$

3. 已知 u，可求 v
已知 v，可求 u　$\longrightarrow$　u.v 相互关联

$\boxed{\text{已知 } u(x,y) \text{ 求 } f(z)}$ ☆

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

C-R 方程代换

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$v(x,y) = \int dv$$

例 1.　$u(x,y) = x^2 - y^2$

例 2.　$v(x,y) = \sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}$$

$$v(\rho,\varphi) = \sqrt{-\rho\cos\varphi+\rho} = \sqrt{\rho(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi \overset{\text{代换}}{=\!=} \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}d\rho - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}d\varphi$$

$$= \frac{1}{\rho}\cdot\sqrt{2\rho}\,\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\rho - \rho\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}d\rho - \frac{\rho}{\sqrt{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

还要积分得 $u(x,y)$

再积分得到 $f(z) = (2z)^{1/2}$

注意整理由全微分求原函数的多种方法

§ 1.5 平面标量场

$\vec{E}=-\nabla u$ 由标量分布转为矢量分布

三维问题变为二维，是一种近似

电场 $\vec{E}=-\nabla u$

$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0=0$ （无电荷范围）

$\Delta u=0$

才满足解析函数要求

$f(z)=u+iv$

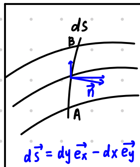
电力线（等u线，矢量）

等电通量线（等v线，标量）

例题

$\vec{q}=-k\nabla u$ 热传导公式

热流与等温线



$d\vec{s}=dy\,\vec{e_x}-dx\,\vec{e_y}$

$\int\vec{E}\cdot d\vec{s}$ $\vec{n}$ 分解

$=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e_y}\right)ds\ (\cos\theta\,\vec{e_x}+\sin\theta\,\vec{e_y})$ 替换

$=-\int_A^B\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)\quad ds\left(\frac{dy}{ds}\vec{e_x}-\frac{dx}{ds}\vec{e_y}\right)$

$=-\int_A^B\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)$ C-R

$=-\int_A^B dv$

认真复习例题

例题：某电力线为抛物线族 $y^2=c^2+2cx$ $(c>0)$，求等势线

由题解得 $c=-x+\sqrt{x^2+y^2}$ 定义为t　带数的F也为const.

$v(x,y)=F(-x+\sqrt{x^2+y^2})=F(t)$　v(x,y)必须为调和函数！

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ 应满足

$\frac{\partial v}{\partial x}=F'(t)\frac{\partial t}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(t)\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+F'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$　同理可得 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

代入拉普拉斯方程 $\Delta H=0$，得 $\frac{F''(t)}{F'(t)}=-\frac{1}{2t}$.

$\frac{dF'(t)}{F'(t)}=-\frac{1}{2t}dt$

$d\ln F'(t)=d(-\frac{1}{2}\ln t)$

$=d(\ln t^{-1/2})$

积分得 $F'(t)=C/\sqrt{t}$.

再积分一次得 $F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2$

$\therefore v=F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2=C_1\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2$

又有 $u=C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3$

$\therefore$ 等势线为 $C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3=\text{const.}$

即 $y^2=c^2-2cx$ $(c>0)$

§ 1.6 多值函数

定义　对于多值函数 $w=f(z)$，若z绕某点n圈后才回到起点　则称该点为 $f(z)$ 的 $n-1$ 阶支点　（若不回到起点，则为无穷阶支点）

绕某点转一圈不在起点，则称多值函数

$W(z)=\sqrt{z-z_0}=\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0}}$

转一圈变为 $\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0+i2\pi}}=e^{i\pi}\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0}}$

$=-\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0}}$.

转两圈变为 $\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0+i4\pi}}=e^{2i\pi}\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0}}$

$=\sqrt{\rho_0e^{i\varphi_0}}$ 回到原点

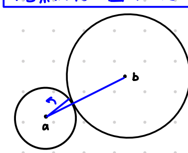
则称 z_0 是 $w(z)$ 的一阶支点

$W(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$

转一圈后.

$w(z)=\sqrt{\rho_ae^{i\varphi_{a_1}+i2\pi}\rho_be^{i\varphi_{b_0}}}$

$=e^{i\pi}\sqrt{\rho_ae^{i\varphi_{a_1}}\rho_be^{i\varphi_{b_0}}}$



此时绕a转一圈，b的辐角并未增加

a.b都是 $w(z)$ 的一阶支点

若绕圈包含a与b，等同于绕无穷远处，发现无穷远不是支点

$\sqrt{z-a}$　多值函数的单值化

黎曼面

第二章 复变函数的积分

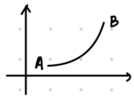
§2.1 复变函数的积分

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\Delta z_k$$

$$= \int_L (u+iv)(dx+idy) \quad \text{积分线性性}$$

$$= \int_L (udx-vdy) + i\int_L (udy+vdx)$$

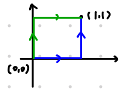
$\boxed{dz = dx+idy}$



例题

$I_1 = \int_{L_1} \mathrm{Re}\,z\,dz$

$I_2 = \int_{L_2} \mathrm{Re}\,z\,dz$



$$I_1 = \int_{(0,0)}^{(1,0)} x(dx+idy) + \int_{(1,0)}^{(1,1)} x(dx+idy)$$

$$= \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 dy$$

$$= \frac{1}{2} + i$$

$$I_2 = \int_{(0,0)}^{(0,1)} x(dx+idy) + \int_{(0,1)}^{(1,1)} x(dx+idy)$$

$$= 0 + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

由于 $I_1 \neq I_2$ 可知 不是解析函数

复变函数积分一般与路径有关

但解析函数与路径无关

§2.2 柯西定理

(1) 若 $f(z)$ 是闭单连通区域 $\bar{B}$ 上的解析函数，则有 $\oint f(z)dz = 0$

证明:

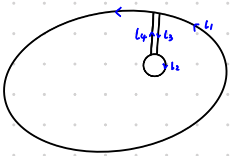
$$\oint f(z)\,dz = \oint (udx-vdy) + i\oint (vdx+udy)$$

$$= \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

由解析函数的 C-R 条件

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\therefore \oint f(z)dz = 0$.

(2) 复连通区域上的解析函数 "构造单连通" 复连通 $\Longrightarrow$ 单连通



$$\oint_L f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz + \underbrace{\int_{l_3} f(z)dz + \int_{l_4} f(z)dz}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\therefore \oint_{l_1} f(z)dz = \oint_{l_2} f(z)dz$$

$$\oint_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{l_k} f(z)dz$$

每一个奇点都可以用一段相反路径挖去

§2.3 不定积分

定义: $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$

$F'(z) = f(z)$

前提是积分结果与路径无关

$$I = \oint_L (z-z_0)^n dz$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & l\text{包围}z_0\text{且 }n=-1 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

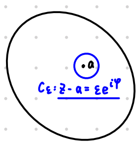
例: $I = \oint_L (z-a)^n dz$

n<0 时需要分类

$$I = \oint_L (z-a)^n dz = \oint_{C_\varepsilon} (z-a)^n dz$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \varepsilon^n e^{in\varphi}\varepsilon e^{i\varphi} i\,d\varphi$$

$$= i\varepsilon^{n+1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\,d\varphi.$$



n为整数

$$= \begin{cases} \varepsilon^{n+1}\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} & \\ i2\pi & n+1=0 \end{cases}$$

即 $\varepsilon^{n+1}\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)\varphi_0}[\underbrace{e^{i(n+1)\cdot 2\pi}-1}_{=0}] = 0$

综合得: $I = \begin{cases} 0, & n>0 \\ 0, & n<0\text{ 且 }n\neq -1\text{的函数} \\ i2\pi, & n=-1 \end{cases}$

§ 2.4 柯西公式

公式: $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-a}dz$

条件: $f(z)$ 在B上解析

证明: 右边

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varepsilon e^{i\varphi}$$

$$=f(a)\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varepsilon e^{i\varphi}$$

$$=f(a)$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

求导: $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

常用结论

应用

模数原理 设 $f(z)$ 在某个闭区域上解析. 则 $|f(z)|$ 只能在边界上取最大值.

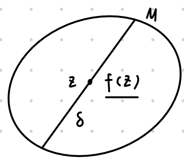
证明: 由柯西公式: $[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{[f(\xi)]^n}{\xi-z}d\xi$

设 $|f(\xi)|$ 在 l 上极大值为 M. $|\xi-z|$ 极小值为 δ. l 的长为 s

$\therefore |f(z)|^n\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M^n}{\delta}\cdot s$ 放缩思想

$\therefore |f(z)|\le M\cdot\left(\frac{s}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$

当 $n\to\infty$ 时. $|f(z)|\le M\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{s}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}=M$ 区域中最大值一定在边界上（内部至多相等）



刘维尔定理 如 $f(z)$ 在全平面上解析. 并且有界. 即 $|f(z)|\le N$. 则 $f(z)$ 必为常数

证明: 对 $f'(z)$ 应用柯西公式，得:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi$$

取 l 为以 z 为圆心. 半径为 R 的圆周.

$$|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{N}{R^2}\cdot 2\pi R=\frac{N}{R}$$

又 R 是任意选定的 $\therefore$ 不妨令 $R\longrightarrow\infty$

则 $|f'(z)|\le 0$ $\therefore f'(z)\equiv 0$

$\therefore f(z)$ 为常数

第三章　复变函数的幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\oint_L f(z)\,dz = a_{-1}\oint_L (z-z_0)^{-1} dz$$

$$= 2\pi i\, a_{-1}$$

其他 $n\neq -1$ 情况积分均为0

§3.1 复数级数展开

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k + i\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k. \quad （定义）$$

1) 复数级数

收敛的充要条件：（Cauchy 收敛判据） $\boxed{\text{对于 } \forall\, \varepsilon>0,\ \text{都} \exists N,\ \text{使得 } n>N \text{ 时}, \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon \quad \text{（其中 p 为任意正整数）}}$

绝对收敛 $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|w_k| = \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{u_k^2+v_k^2}$ 收敛，即 $\sum_{k=n}^{n+p}|w_k| < \varepsilon$　（模组成的级数收敛）　绝对收敛可以换项运算

两个绝对收敛级数 $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = A$，$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = B$．　则有 $\left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} q_i p_j = AB$.

2) 复变函数项级数

$W_k \longrightarrow W_k(z)$

$\varepsilon \quad N_\varepsilon \longrightarrow \varepsilon \quad N_\varepsilon(z)$

若 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} w_k(z)\right| < \varepsilon$　　$N_\varepsilon(z)$ 若与 z 无关，则称为 绝对一致收敛

§3.2 幂级数展开

1) 定义 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$

2) 收敛性 ① 比值判别法

若 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0| < 1$ ，则数列收敛，且绝对收敛，且一致收敛

$|z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \equiv R$ (收敛半径规定为 R)

$|z-z_0| < R$ 绝对一致收敛. $|z-z_0| = R$ 不定 $|z-z_0| > R$ 发散 收敛圆内绝对一致收敛

② 根值判别法

$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\,|z-z_0| < 1$ 规定 $R \equiv \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$，则当 $|z-z_0| < R$ 时，级数绝对一致收敛

3) 例题

$1+z+z^2+\cdots$ 的收敛半径？

解: $a_k = 1$ $\therefore R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = 1$ 或者 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$

$\therefore |z| < 1$ 均收敛，$|z| \geq 1$ 发散

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

求 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ 收敛半径

$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z^2)^k$ $\therefore R=1$ $\therefore |z^2| < 1$ 收敛 $\longrightarrow |z| < 1$ 收敛

4) 性质

① 在收敛圆内部绝对且一致收敛

② $|z-z_0| < R$ 上是解析函数

③ $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ (其中 $R_1 < R$)

④ 在收敛圆内无奇点 (边界可能有)

⑤ 求导或积分不改变收敛半径

eg: $1-z^2+z^4-\cdots = \frac{1}{1+z^2} = w(z) \xrightarrow{\text{求导}} w'(z) = -2z+4z^3-6z^5+8z^7-\cdots$

奇点 $z=\pm i$ 收敛圆 $R=1$ $a_k = 2k(-1)^k$

即奇点恰在收敛圆边界上 $R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$

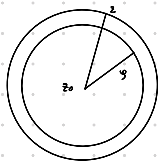
§ 3.3 泰勒级数展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$ $|z - z_0| < R$ 区域内解析.

定理：若 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析. 则 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

其中 $a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$， C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 的同心圆.

证明：
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)-(z-z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \end{aligned}$$



由于 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$

对比后可得 $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

例：在 $z_0 = 1$ 的邻域上将 $f(z) = \ln z$ 作级数展开

$f(1) = \ln 1 = 2n\pi i$ → 注意複数平面！多值函数

$f'(1) = \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = 1$

$f''(1) = -\frac{1}{z^2}\Big|_{z=1} = -1$

$f'''(1) = \frac{2}{z^3}\Big|_{z=1} = 2$

$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(k-1)!$

$\therefore \ln z = 2n\pi i + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{2(z-1)^3}{3!} + \cdots + (-1)^k\frac{(k-1)!}{k!}(z-1)^k$

$$\boxed{\ln z = 2n\pi i + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(z-1)^k}$$

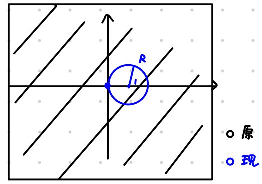
$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{\frac{(-1)^k}{k+1}}\right| = 1$$

即收敛半径 $R = 1$

即展开内需在 $|z-1| < 1$ 才成立

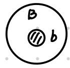
§ 3.4 解析延拓

Taylor 展开时, $f(z)$ 原函数范围较大, 但展开后函数定义域很小 (收敛圆内)　　eg: 上页 $\ln z$ 在 $z_0=1$ 展开



定义: $f(z)$ 在区域 b 内解析, $F(z)$ 在区域 B 内解析

若 $F(z)=f(z)$ 在 b 上成立, 则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的解析延拓



$F(z)$ 在 B 上解析, 且在与 b 有重叠的部分上等同于 $f(z)$

当 B 区域确定, 对 b 上解析的 $f(z)$ 解析延拓得到的 $F(z)$ 唯一确定　(若 B 不同则不唯一)

---

§ 3.5 洛朗级数展开

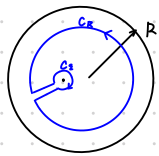
$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$　包含负幂次项

收敛域 $\Longrightarrow$ $R_2 < |z-z_0| < R_1$

$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi \neq \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

不一定等

原因: 柯西公式要求内部区域解析, 但 C_R 区域内通常含有奇点



例1. $\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 处作洛朗级数展开.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

可去奇点 $z=0$ (表达式中无体现, 但收敛域要去掉)

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+3)!}{(2k+1)!}=\infty$$

收敛域为: $0<|z-0|<\infty$

可补充为 $g(z)=\begin{cases} f(z) & , |z|>0 \\ 1 & , |z|=0\end{cases}$

$g(z)$ 为 $f(z)$ 的解析延拓

例2. 在 $z_0=1$ 的邻域上将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 作洛朗级数展开

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

希望展开为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k$

$$= -\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(z-1)}\right)$$

$$= -\sum_{k=-1}^{\infty}(z-1)^k$$

收敛域: $0<|z-1|<1$

$z=0$ 是 极点型奇点

若奇点所在的幂次为 -3

则乘上 3 次方变为 Taylor 级数

称为三次 … 奇点

例3. 将 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z_0=0$ 的邻域展开

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{|k|!}z^k$$

收敛域 $0<|z|<\infty$

$z=0$ 称为 本性奇点

例4. $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ 在 $z_0=0$ 邻域展开.

原式 $=\boxed{e^{\frac{x}{2}z}\cdot e^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{z}}}$　Bessel 函数的母函数.

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}z\right)^k \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\left(-\frac{x}{2}\frac{1}{z}\right)^l$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{(-1)^{k-m}}{(k-m)!}\left(-\frac{x}{2}\right)^{k-m}z^m$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m$$

其中 $J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$　Bessel 函数

收敛域 $0<|z|<\infty$

在内部绝对且一致收敛

可以换项计算

目标 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_m z^m$

$(l=k-m)$

§3.6 孤立奇点的分类

奇点可分为孤立奇点和非孤立奇点 （例：$\frac{1}{z-z_0}$ 有孤立奇点 $z=z_0$ $\frac{1}{\mathrm{Re}\,z - x_0}$ 在线上均为奇点（非孤立））

孤立奇点：奇点邻域解析

$\frac{1}{\mathrm{Re}\,z - x_0}$：非解析

$\boxed{\text{孤立奇点}}$
- ① 可去奇点 （展开后该处无负幂次项）
- ② 极点型奇点 （负幂次项有限）
- ③ 本性奇点 （无穷负幂次项）

第四章 留数定理及其应用

已知 $\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & (\text{其他情况}) \\ 2\pi i & (C\text{包含}z_0\text{且}n=-1) \end{cases}$

§4.1 留数定理

1) 留数的定义

$f(z)$ 在区域 B 上解析（除孤立奇点），作洛朗级数展开. $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 取 z_0 邻域的小回路、利用柯西公式

$\oint_C f(z)dz \overset{\text{上式}}{=\!=} a_{-1}\cdot 2\pi i$，规定 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数. 记为 $\text{Res}\, f(z_0)$

因此有 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\cdot \text{Res}\, f(z_0)$

2) 留数定理

设 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 内除有限个孤立奇点 z_1、$z_2 \cdots z_n$ 外解析

在区域 B 上除 $z_1 \cdots z_n$ 连续. 则有.

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\, f(z_i)$$

$\boxed{\text{回路积分} = 2\pi i\times\text{回路区域各孤立奇点的留数之和}}$

$\text{Res}\, f(\infty) = -a_{-1}$

因此 无穷远点的留数为相反数

全平面内各点留数之和为零

3) 留数的计算

① 确定 l 所围区域内的奇点

② 各奇点在邻域内作洛朗级数展开确定留数

③ 极点型奇点 （判断阶数：乘上 $(z-z_0)^k$，取 $z\to z_0$ 的极限从 0 变为有限值时的 k 即为阶）

$$f(z)\cdot(z-z_i)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_i) + \cdots + \boxed{a_{-1}(z-z_i)^{k-1}} + a_0 (z-z_i)^k + \cdots$$

关注对象.

先求 k-1 阶导数，再取 $z\to z_i$ 极限.

最后得到 $a_{-1} = \lim\limits_{z\to z_i} \frac{1}{(k-1)!}\left[(z-z_i)^k f(z)\right]^{(k-1)}$ （针对 k 阶极点）

对于单极点 $a_{-1} = \lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)$ 不需要求导

---

4) 举例

① $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$

两个单极点为 $z=1$，$z=-1$

$\text{Res}\, f(1) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \frac{1}{2}$

$\text{Res}\, f(-1) = \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = -\frac{1}{2}$

$\text{Res}\, f(\infty) = 0$

② $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$

$z=1$ 为二阶极点

$\therefore \text{Res}\, f(1) = \lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\left[(z-1)^2 f(z)\right]' = \lim\limits_{z\to 1}\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{4}$

$\text{Res}\, f(-1) = \lim\limits_{z\to -1}\left[(z+1)f(z)\right] = \frac{1}{4}$

③ $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$

$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots$

$\text{Res}\, f(0) = 0$

④ $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

奇点为 $z = 0, \pi, 2\pi, \cdots n\pi$ 无穷多一阶极点

$a_{-1} = \lim\limits_{z\to z_i}\frac{1}{(k-1)!}\left[(z-z_i)^k f(z)\right]^{(k-1)}$

因此 $\lim\limits_{z\to n\pi} f(z)\cdot(z-n\pi) = \lim\limits_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z} = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$

$\text{Res}\, f(n\pi) = (-1)^n$ $\quad$ $\text{Res}\, f(\infty) = $ 不定

⑤ $\oint_{|z|=1}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}dz \quad (0<\varepsilon<1)$

先求奇点 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon = 0 \longrightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ 考虑回路. $|z_1| = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} > 1$

不在回路内

因此回路内奇点仅有 $z_2 = \frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 且为单极点

$\therefore \text{Res}\, f(z_2) = \lim\limits_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim\limits_{z\to z_2}\frac{1}{2\varepsilon z+2} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2(1-\varepsilon^2)}$

$\therefore$ 原式 $= 2\pi i\cdot\text{Res}\, f(z_2) = 2\pi i\cdot\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2(1-\varepsilon^2)} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

§ 4.2 应用留数定理求实变函数积分

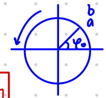
思路：将线段通过映射 / 补曲线变为完整回路，利用留数定理计算回路积分，再返回计算线段积分

其中 补的曲线要容易计算：① 等于0　② 恰好为所求积分的倍数　③ 本身易于计算

如何构造？

方案 1： $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$　　a　b

$\boxed{z = e^{ix/\beta} \quad \therefore \varphi_0 = \frac{a}{\beta},\ \varphi_0 + 2\pi = \frac{b}{\beta}}$



条件是 $a \sim b$ 之间不能有奇点

作差有：$\frac{a-b}{\beta} = 2\pi \Rightarrow$ 若积分区间为 $[0, 2\pi]$ 则显然 $\beta = 1$

形如 $f(x) = R(\cos x, \sin x)$

$z = e^{ix/\beta}$

由公式得 $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^\beta + z^{-\beta}}{2}$，$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^\beta - z^{-\beta}}{2i}$

代入原式计算，将积分区间 $[0, 2\pi]$ 变为闭合积分回路

eg. $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$，$0<\varepsilon<1$

$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+\varepsilon \cdot \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{1}{iz}\,dz$　　将所有含 x 的项代换掉　$z = e^{ix} \Rightarrow dx = \frac{1}{iz}dz$

$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$　　积分限是 $0 \sim 2\pi$　$\therefore$ 取 $\beta = 1$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx \qquad z = e^{ix/\beta}\\ &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}\,dz \qquad \text{注意 } \beta \text{ 取值}\end{aligned}}$$

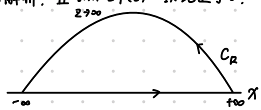
方案 2： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dz$

注意前提条件

要求 $f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面（或下半平面）除了有限个孤立奇点外解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)$ 一致地趋于0.

则有 $\oint f(z)\,dz = \lim\limits_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz\right\}$.

$= 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \text{Res} f(z_k)$　（上半平面奇点留数之和）



$z = \rho e^{i\varphi}$ 即 C_R 取无穷大圆

$\rho\to\infty$，$zf(z)\to 0$　一致趋于0

例1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

由方案2. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$，$zf(z) = \frac{z}{1+z^2}$　$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^2} \to 0$

前提条件中需要 $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$

即 $f(z)$ 等价于 $\frac{1}{z^{1+\varepsilon}}$　$(\varepsilon>0)$

不妨考虑上半平面　$1+z^2=0 \Rightarrow z=\pm i$.　上半平面奇点为 $z=i$

$\oint \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \boxed{\int_{C_R} \frac{z}{1+z^2} \cdot \frac{dz}{z}} \to 0$

$= 2\pi i \cdot \text{Res} f(i)$　　注意是一阶极点

$= 2\pi i \lim\limits_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2}$　洛必达

$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$

$$\left(\begin{aligned}&z = \rho e^{i\varphi}\\ &dz = \rho e^{i\varphi} \cdot i\,d\varphi\\ &\therefore \frac{dz}{z} = i\,d\varphi\end{aligned}\right)$$

若选择下半平面积分，则最后结果还有加上负号（$-2\pi i \times$ 留数之和）

例2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$

$f(z) = \frac{1}{(z+i)^n (z-i)^n}$

n 阶极点 $z=i$　　$\therefore \text{Res} f(i) = \lim\limits_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]$

$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} (2i)^{-(2n-1)}$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = 2\pi i \cdot \text{Res} f(i)$

$= \frac{\pi}{2^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}$

方案3： $\int_0^\infty F(x)\cos x\,dx$ 或 $\int_0^\infty G(x)\sin x\,dx$

要求 $F(x)$ 为偶函数，利用奇偶性 $G(x)$ 为奇函数 　　　还要求 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于0 　等价于 $\frac{1}{z^\varepsilon}$ 即可

上式 $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos x\,dx$ 　　上式 $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\sin x\,dx$

再利用 $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ， $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$\therefore \int_0^\infty F(x)\cos x\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix}dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ix}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix}dx + \frac{1}{4}\int_{+\infty}^{-\infty} F(-x)e^{ix}d(-x)$$ 令 $-x=t$ 换元与前项等价

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix}dx$$

此外，$\int_0^\infty F(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{imx}dx$ 　　$\int_0^\infty F(x)\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix}dx$ 　利用留数定理

并且 $\int_0^\infty G(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\sin mx\,dx = \pi\sum G(z)e^{imz}$ 在上半平面的留数之和

约当引理（Jordan's Lemma）

$f(z)$ 在区域 $\theta_1 \le \arg(z) \le \theta_2$， $R<|z|<\infty$ 上连续且有极限

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 一致地趋于0，则 $m>0$ 有：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\text{圆弧}} f(z)e^{imz}dz = 0$$

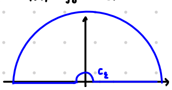
证明：$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| \le \max|f(z)|\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|e^{imRe^{i\varphi}}\right|\cdot \underbrace{iRe^{i\varphi}}_{\text{取模为}R}d\varphi$

$$= \max|f(z)|\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|e^{imR\cos\varphi+imR\sin\varphi}\right|R\,d\varphi$$ 要证后面积分 part $\longrightarrow 0$

例1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

由上可知 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ $\therefore G(z)=\frac{1}{z}$ 化为 $\int_0^\infty G(z)\sin z\,dz$ 的形式

$\frac{e^{iz}}{z}$ 奇点 $z=0$． 积分回路



可得 $\boxed{\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz} + 2\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ （无奇点）

补

$$= \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}i\,d\varphi$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_\pi^0 \left[1+i\varepsilon e^{i\varphi}+\frac{1}{2}(i\varepsilon e^{i\varphi})^2+\cdots\right]d\varphi$$

$= -\pi$ 　　　最后可得 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

例2. $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$

实轴上无奇点，上半平面 $z=ia$ 为奇点（一阶）

$F(z)=\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$

$\text{Res}\,F(ia)=\lim_{z\to ia}\frac{1}{z+ia}=\frac{1}{2ia}$

$\therefore \int_0^{\infty}F(z)\cos mz\,dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{imz}dz$. 利用已有公式

$\therefore \text{Res}\;F(z)e^{imz}=\frac{1}{2ia}e^{-ma}\quad(z=ia)$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}\times 2\pi i\times \text{Res}\left[F(z)e^{imz}\right]$

$=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}$

总结：$\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)e^{imx}dx$

$=\pi\sum G(z)e^{imz}$ 在上半平面留数

$\int_0^{\infty}F(x)\cos mx\,dx=\pi i\sum F(z)e^{imz}$ 在上半平面留数

★ (New)

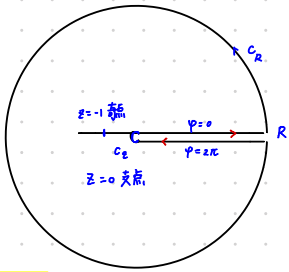
$$\int_0^{\infty}F(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{imx}dx$$

$$\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)e^{imx}dx$$

§ 4.3 计算定积分的补充例题

例题：

$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx.\quad(0<\alpha<1)$



$f(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ 为多值函数，$z=0$ 为支点，积分回路必须绕开割线

$1+z=0\Rightarrow$ 奇点 $z=-1$

$\oint f(z)dz=2\pi i\,\text{Res}\,f(-1)$

$=\underbrace{\int_\varepsilon^R f(z)dz}_{\text{所求}I}+\underbrace{\int_{C_R}f(z)dz}_{=0}+\int_R^\varepsilon f(z)dz+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz$ ①

$\left|\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right|<\int_{C_R}\left|\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right||dz|\le\frac{R^{\alpha-1}}{R}\cdot 2\pi R\longrightarrow 0$

$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right|\le\varepsilon^{\alpha-1}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi=2\pi\varepsilon^{\alpha}\to 0\;(\varepsilon\to 0)$

由于 $\int_R^\varepsilon f(z)dz$ 中的 z 处于下半叶黎曼面，故 $z=\rho e^{i2\pi}$.

$=\int_R^\varepsilon\frac{\rho^{\alpha-1}\cdot e^{i2\pi(\alpha-1)}}{\rho e^{i2\pi}}d\rho e^{i2\pi}$

$=-e^{i2\pi(\alpha-1)}I$

由①得 $2\pi i\cdot e^{i\pi(\alpha-1)}=I-Ie^{i2\pi(\alpha-1)}$

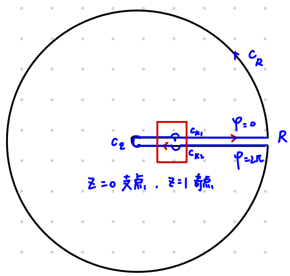
$\therefore I=\frac{2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}}{1-e^{i2\pi(\alpha-1)}}=\frac{2\pi i}{-e^{-i\pi\alpha}+e^{i\pi\alpha}}$

$=\frac{2\pi i}{2i\cdot\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i}}$

$=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ 定积分最终结果一定为实数.（不含 i）

$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx$

$f(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{1-z}$ （$z=1$ 为奇点且在积分路径上）（$z=0$ 是支点）



$\oint f(z)dz=0$ （回路无奇点）

$=\underbrace{\int_\varepsilon^{1-\delta}f(x)dx+\int_{1+\delta}^R f(x)dx}_{I}+\int_{C_{k_1}}f(z)dz+\underbrace{\int_{C_R}f(z)dz}_{=0}$

$+\int_R^{1+\delta}f(z)dz+\int_{C_{k_2}}f(z)dz+\int_{1-\delta}^{\varepsilon}f(z)dz+\underbrace{\int_{C_\varepsilon}f(z)dz}_{=0}$

其中 $\int_{C_R}$，$\int_{C_\varepsilon}$ 均为0

$1-z=\delta e^{i\varphi}\Rightarrow dz=-\delta de^{i\varphi}\quad(\delta\to 0)$

$\therefore\int_{C_{k_1}}f(z)dz=\int_\pi^0\frac{(1-\delta e^{i\varphi})^{\alpha-1}}{\delta e^{i\varphi}}(-\delta)\,ie^{i\varphi}d\varphi$

$=i\int_0^\pi(1-\delta e^{i\varphi})^{\alpha-1}d\varphi=\pi i$

$\int_{C_{k_2}}f(z)dz=\int_{2\pi}^{\pi}\frac{(e^{i2\pi}+\delta e^{i\varphi})^{\alpha-1}}{-\delta e^{i\varphi}}i\delta e^{i\varphi}d\varphi=\pi i e^{i2\pi\alpha}$

支点旁边 z 的取值要写 $e^{i2\pi}$ 而不是 1.

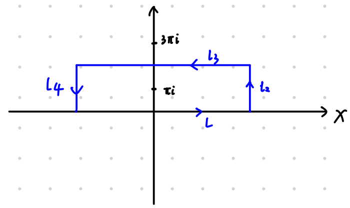
整理得：$\pi i+I-e^{i2\pi\alpha}\cdot I+\pi i e^{i2\pi\alpha}=0$

$\therefore I=\frac{\pi i(1+e^{i2\pi\alpha})}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\pi\cdot\cot(\pi\alpha)$

又有 $\begin{cases}\int_R^{1+\delta}f(z)dz=\int_\infty^1\frac{(\rho e^{i2\pi})^{\alpha-1}}{1-\rho e^{i2\pi}}e^{i2\pi}d\rho=e^{i2\pi\alpha}\int_\infty^1 f(x)dx\\ \int_{1-\delta}^{\varepsilon}f(z)dz=e^{i2\pi\alpha}\int_1^0 f(x)dx\quad(\varepsilon\to 0,\ \delta\to 0)\end{cases}$

两部分相加为 $-e^{i2\pi\alpha}\cdot I$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\, dx \quad .(0<\alpha<1)$$



$f(z) = \dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^{z}}$ 奇点 $1+e^{z}=0 \Rightarrow z=(2k+1)\pi i$.（k为整数）

虚轴上有无穷多奇点. 不妨回路只包含 πi 一个奇点

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(\pi i)$$

$$= I + \int_{L_2} f(z)\,dz + \int_{L_3} f(z)\,dz + \int_{L_4} f(z)\,dz$$

$$\int \frac{e^{i w x}}{w^2 + x^2}\, dw$$

第五章 傅里叶变换

§5.1 傅里叶级数 (Fourier Series)

原有幂级数展开：$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ，$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

但缺点在于体现不出周期性，且不适用于间跃函数 $\longrightarrow$ 引入傅里叶级数

周期函数 $f(x+T)=f(x)$ ，T为周期

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad f(x+2l)=f(x)}$$

其中 $\{\cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x\}$ (n为自然数) 称为展开的基

基都是恰好完备且正交的 (重要性质)

正交性证明：

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^{2l} \cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx=0 \quad (k\neq n)\\ &\int_0^{2l} \sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=0 \quad (k\neq n)\\ &\int_0^{2l} \cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=0 \end{aligned}}$$

求系数：
$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx &= \int_{-l}^{l} a_0\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx\\ &= a_k\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{k\pi}{l}x\,dx \quad (\text{其他部分由于正交性都为}0)\\ &= a_k\cdot\frac{l}{k\pi}\int_{-k\pi}^{k\pi}(\cos y)^2\,dy \quad (y=\frac{k\pi}{l}x\ \text{换元})\\ &= l\,a_k \end{aligned}$$
可得 a_k，同理求 b_k

最终得到傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$
$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

Dirichlet 收敛定理

若函数 $f(x)$ 满足条件：(1) 处处连续，或在每个周期内只有有限个第一类间断点
(2) 每个周期内只有有限个极值点

则 $f(x)$ 展开的级数收敛，(但未必收敛于 $f(x)$)

且级数和 $=\begin{cases} f(x) & (\text{连续点})\\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] & (\text{间断点})\end{cases}$

例1：$f(x)=\begin{cases} x, & -l\le x\le l\\ f(x)=f(x+2l) \end{cases}$ 求 $f(x)$ 傅里叶展开。

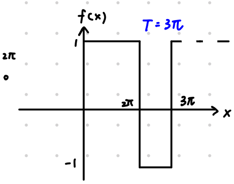
$f(x)$ 为奇函数 $\therefore a_k=0$，$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x\,dx=0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\\ &= -\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} x\cdot\left(d\cos\frac{k\pi}{l}x\right)\\ &= -\frac{1}{k\pi}\left(x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\right)\Big|_{-l}^{l}+\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx\\ &= \frac{1}{k\pi}(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}x$

例2：$a_0=\frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}dx=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}-\cos\frac{2k}{3}x\,dx+\frac{2}{3\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{2k}{3}x\,dx\\ &= \frac{2}{3\pi}\left(-\frac{3}{2k}\sin\frac{2k}{3}x\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{3\pi}\left(\frac{3}{2k}\sin\frac{2k}{3}x\right)\Big|_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{k\pi}\left(\sin\frac{4k\pi}{3}-\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\\ &= \begin{cases} -\sqrt{3}/k\pi, & k=3n+1\\ \sqrt{3}/k\pi, & k=3n+2 \quad (n\text{取}0,1,2,\cdots)\\ 0, & k=3n \end{cases} \end{aligned}$$



复数形式的傅里叶级数

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{k\pi}{l}x}}$$

正交性：$\int_{-l}^{l} e^{i\cdot\frac{n\pi}{l}x}\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\,dx=2l\,\delta_{k,n}=\begin{cases} 2l, & k=n\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$

求系数：$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-i\cdot\frac{k\pi}{l}x}\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\int e^{i\cdot\frac{n\pi}{l}x}\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\,dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,2l\,\delta_{n,k}=2l\,C_k$

$$C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\,dx$$
$$C_n^*=C_{-n}$$

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\left(\cos\frac{n\pi}{l}x+i\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

可得 $a_0=C_0$，$a_n=\frac{C_n+C_n^*}{2}$，$b_n=\frac{C_n-C_n^*}{2}$

$$\begin{aligned} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}+C_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{l}x} &= 2\,\mathrm{Re}\left(C_n e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\right)\\ &= 2|C_n|\cos\left(\frac{n\pi x}{l}+\arg C_n\right) \end{aligned}$$

§5.2 傅里叶积分与傅里叶变换

$f(x)=f(x+2l)$

$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos w_n x+b_n\sin w_n x)$

$\Delta w=w_n-w_{n-1}=\frac{\pi}{l}$

$l\to\infty$时, $\Delta w\to 0$

可以利用积分的定义来表达求和

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\sum_{w}^{\infty}a_w\cos wx&=\lim_{l\to\infty}\sum_{w}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos w\xi\,d\xi\right]\cos wx\\&=\lim_{l\to\infty}\sum_{w}\frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{l}}_{dw}\underbrace{\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos w\xi\,d\xi\cdot\cos wx}_{w\text{的函数 定义为 }A(w)}\\&=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}A(w)\cos wx\,dw\\\text{同理可得: }f(x)&=\int_{0}^{\infty}A(w)\cos wx\,dw+\int_{0}^{\infty}B(w)\sin wx\,dw.\end{aligned}}$$

用周期函数
表示非周期函数

→ 傅里叶积分

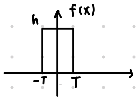
其中 $A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos w\xi\,d\xi$

$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin w\xi\,d\xi.$

$f(x)\longrightarrow A(w),\ B(w)$

傅里叶变换 ← 与逆变换

例题:



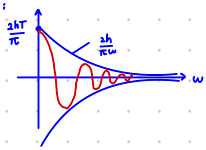
偶函数
单脉冲

$B(w)=0$ 偶函数

$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos w\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{T}h\cos w\xi\,d\xi$

$\therefore A(w)=\frac{2h}{\pi w}\sin wT$

$A(w)$ 图像:



例2: $f(t)=\begin{cases}0. & t<-N\cdot\frac{2\pi}{w_0}\\ A\sin w_0t. & -N\frac{2\pi}{w_0}<t<N\frac{2\pi}{w_0}\\ 0. & t>N\frac{2\pi}{w_0}\end{cases}$ 求 $f(t)$ 的傅立叶变换

$f(x)$为奇函数 $\therefore A(w)=0$

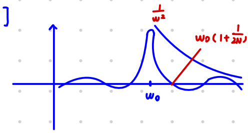
$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin w\xi\,d\xi$

$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{N\frac{2\pi}{w_0}}A\sin w_0t\sin wt\,dt$ 积化和差

$=-\frac{A}{\pi}\int_{0}^{N\frac{2\pi}{w_0}}[\cos(w_0+w)t-\cos(w_0-w)t]\,dt$

$=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(w-w_0)\cdot N\frac{2\pi}{w_0}}{w_0-w}-\frac{\sin(w+w_0)\cdot N\frac{2\pi}{w_0}}{w+w_0}\right]$

$=\frac{2Aw_0}{\pi(w^2-w_0^2)}\sin\left(N\cdot\frac{2\pi}{w_0}\right)$



复数形式的 Fourier 变换

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwx}dw\\\text{其中 }F(w)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-iw\xi}d\xi\end{aligned}}$$

(傅里叶积分)

(傅里叶变换)

则有 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-iw\xi}e^{iwx}d\xi dw$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iw(x-\xi)}dw}\,d\xi$

不妨计为 $2\pi\delta(x-\xi)=\begin{cases}0. & x\neq\xi\\ \infty. & x=\xi\end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)dw=\int_{x^-}^{x^+}\delta(x-\xi)d\xi$

$=f(x)$

为保证等式成立 $\therefore$ 定义有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iw(x-\xi)}dw=2\pi\delta(x-\xi)$

基本性质 f(x)为原函数. F(w)为像函数

① 导数定理

$f(x)\Longrightarrow F(w)$

定义 $\underline{\mathcal{F}(f(x))}\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx=F(w)$

$\mathcal{F}(f'(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-iwx}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iwx}d(f(x))$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)de^{-iwx}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underline{\underline{iw}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx$

由此得到 $\mathcal{F}(f'(x))=iw\mathcal{F}(f(x))$

$\mathcal{F}(f^{(n)}(x))=(iw)^n\mathcal{F}(f(x))$

例题. $y''(x)+w_0^2y(x)=0$ 求 $y(x)$ △

$\mathcal{F}(y(x))=F(w)$

则有 $-w^2F(w)+w_0^2F(w)=0$

$(w^2-w_0^2)F(w)=0$

应有 $F(w)=A\delta(w-w_0)+B\delta(w+w_0)$ ($w\neq\pm w_0$ 时 $F(w)$ 均为0)

$y(x)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwx}\delta(w-w_0)dw+\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwx}\delta(w+w_0)dw$

$=\tilde{A}e^{iw_0x}+\tilde{B}e^{-iw_0x}$

$=C\sin w_0x+D\cos w_0x.$

$\boxed{\text{对一个函数的导数作FT. 等价于像函数乘以 }iw}$

② ~ ⑥ 定理

补充上页定理

② 积分定理

$$\mathcal{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

对一个函数的积分作 FT. 等价于像函数除以 $i\omega$

③ 相似性定理

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

注意 a 的位置.

④ 延迟定理

$$\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0}F(\omega)$$

⑤ 位移定理

$$\mathcal{F}[e^{i\omega x_0} f(x)] = f(\omega-\omega_0)$$

⑥ 卷积定理:

若 $\mathcal{F}[f_1(x)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$

则 $\mathcal{F}[f_1(x)\cdot f_2(x)] = 2\pi F_1(\omega) + 2\pi F_2(\xi)$.

其中 $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)d\xi$. 称为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积

三维空间

$$f(\vec{r}) = f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint F(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int_{-\infty}^{+\infty}dk_y\int_{-\infty}^{+\infty}dk_z\, F(k_x,k_y,k_z)\, e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

$$\mathcal{F}(f(\vec{r})) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r}$$

§ 5.3 δ函数

1) 引入δ函数

$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ 并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+}\delta(x)\,dx = 1$，这样的函数定义为δ函数．本质上是理想模型

$\delta(x)$ 的量纲 $[\delta(x)]$ 为 $\frac{1}{[x]}$

2) 性质

① **偶函数** $\delta(x) = \delta(-x)$ $\delta'(-x) = -\delta'(x)$

② **阶跃函数**

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} 1, & x>x_0 \\ 0, & x<x_0 \end{cases}$$

$$= H(x-x_0)$$

则有 $H'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$ $H(x-x_0)$ 称为阶跃函数

③ **挑选性**

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \int_a^{x_0^-} f(x)\delta(x-x_0)\,dx + \int_{x_0^-}^{x_0^+} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx + \int_{x_0^+}^{b} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx$$

$$= f(x_0)\int_{x_0-}^{x_0+}\delta(x-x_0)\,dx$$

$$= f(x_0)$$

$f(x)$ 乘上 $\delta(x-x_0)$ 后积分被挑选，只留下 $f(x_0)$

④

$$\boxed{\delta(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & \varphi(x)\neq 0 \\ \infty, & \varphi(x)=0 \end{cases}}$$

$\int_a^b \delta(\varphi(x))\,d\varphi(x) = 1$ 即 $\int_a^b \varphi'(x)\,\delta(\varphi(x))\,dx = 1$

若 $\varphi(x)=0$ 只有单根

$\delta(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,\delta(x-x_k)$ 其中 $C_k = \int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon}\delta(\varphi(x))\,dx$

x_k 是 $\varphi(x)=0$ 的第k个根

$$C_k = \int_{\varphi(x_k-\varepsilon)}^{\varphi(x_k+\varepsilon)}\delta(\varphi(x))\,\frac{d\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$

若 $\varphi'(x_k)>0$，则 $C_k = \frac{1}{\varphi'(x_k)}$

若 $\varphi'(x_k)<0$，则 $C_k = -\frac{1}{\varphi'(x_k)}$

综上：$C_k = \frac{1}{|\varphi'(x_k)|}$

$\delta(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,\delta(x-x_k)$

$\delta(x^2) = \frac{\delta(x)}{|x|}$ （看量纲）

3) δ(x)的傅里叶变换

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\,e^{iwx}\,dw$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-iwx}\,dx$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}C(w)\,e^{iwx}\,dw$$

$$C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$ （挑选性）

因此 $\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwx}\,dw}$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{iwx}\,dw = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{e^{ixR}-e^{-ixR}}{ix} = \frac{1}{x\pi}\lim_{R\to\infty}\sin Rx$$

等价：$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{R\sin Rx}{xR} = \lim_{R\to\infty}\frac{R}{\pi}\longrightarrow\infty$

$$\boxed{\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{w(ix+\varepsilon)}\,dw + \int_{0}^{\infty}e^{w(ix-\varepsilon)}\,dw\right]}$$

$\delta(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon+ix}+\frac{1}{\varepsilon-ix}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases}$$

解释了 $\delta(x)$ 的定义取值

并且有 $\int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} = \begin{cases} 0, & a>0 \text{ 或 } b<0 \\ 1, & a<0<b \end{cases}$

4) 多维空间的 δ 函数

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r}=0 \\ 0, & \vec{r}\neq 0 \end{cases}$$ 则有 $\iiint \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 1$

$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ （直角坐标系下）

柱坐标系下 $d^3\vec{r} = r\,dr\,dz\,d\varphi$ $\int_0^\infty r\,dr \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(\vec{r}) = 1$

$\delta(\vec{r}-\vec{r_0}) = \frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$

球坐标系下 $d^3\vec{r} = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\delta(\vec{r}-\vec{r_0}) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\ \delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$ 不要漏掉坐标系变换的"系数"

5) 例题

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})\right]\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

定态一维 用傅里叶变换求解定态一维薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\psi = E\psi$$

$U(x) = -V_0\,\delta(x)$

方程化为 $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_0\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)}$ $\psi'' - w_E^2\psi = 0 \quad (x\neq 0)$ $w_E^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

$\psi^+(x) = A^+ e^{-w_E x} + B^+ e^{w_E x} \quad (x>0)$

$\psi^-(x) = A^- e^{-w_E x} + B^- e^{w_E x} \quad (x<0)$

保证连续性，需有 $A^+ = B^-$

$\therefore \psi(x) = A^+ e^{w_E|x|}$

第六章 拉普拉斯变换

回顾. Fourier Transformation

$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dw \equiv \mathcal{F}(f(x))$ Fourier 变换

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{iwx} dx \equiv \mathcal{F}^{-1}(F(w))$ Fourier 积分

积分、微分方程 $\xrightarrow{FT.\ F(w)}$ 代数或低阶微分方程 $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}(F(w))}$ $f(x)$

1) 拉普拉斯变换 (LT) 定义

$\bar{\varphi}(p) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt \equiv \mathcal{L}(\varphi(t))$

$\boxed{\text{LT 从 0 开始，是半区域}}$ $\boxed{\text{必须保证 } \varphi(t)e^{-pt} \text{ 本身收敛}}$

简记: $\varphi(t) \;\dot{=}\; \bar{\varphi}(p)$ 也可写为 $\bar{\varphi}(p) = \mathcal{L}(\varphi(t))$

原函数 像函数 $\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{\varphi}(p))$

例题:

$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[H(t)]$

规定 $H(t) = \begin{cases} 1 . & t \geq 0 \\ 0 . & t < 0 \end{cases}$

$\therefore \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt$

$= -\frac{1}{p} \int_0^\infty 1 \cdot (-p) e^{-pt} dt$

$= -\frac{1}{p} \cdot (e^{-pt})\Big|_0^\infty$

$= \frac{1}{p}$ 要求 $\mathrm{Re}\, p > 0$

$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-pt} dt$ 要求 $\mathrm{Re}\, p > 0$

$= -\frac{1}{p} \int_0^\infty t^n \cdot d(e^{-pt})$

$= \underbrace{-\frac{1}{p} \cdot (t^n e^{-pt})\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{p} \cdot \int_0^\infty e^{-pt} \cdot d(t^n)$

$= \frac{1}{p} \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot e^{-pt} dt$

利用递推规律

$= \frac{n}{p} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \mathcal{L}[t^{n-2}] \cdots = \frac{n!}{p^n} \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

$\mathcal{L}[e^{st}] = \int_0^\infty e^{st} e^{-pt} dt$

要求 $\mathrm{Re}\, p > s$ $= \frac{1}{p-s}$

$\mathcal{L}[e^{st} t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-(p-s)t} dt$

$= \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$

2) 拉普拉斯变换性质

① 线性性: $\mathcal{L}[C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)] = C_1\mathcal{L}[\varphi_1(t)] + C_2\mathcal{L}[\varphi_2(t)]$

eg: $\sin wt = \frac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt})$ 同理 $\mathcal{L}[\cos wt] = \frac{p}{p^2+w^2}$

$\mathcal{L}[\sin wt] = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{iwt}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-iwt}]$

实际是 $\sin wt \cdot H(t)$

$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}\right]$

$= \frac{w}{p^2+w^2}$

② 导数定理 每多求一次导会多出一项

$\mathcal{L}\left[\frac{d\varphi(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{dt} e^{-pt} dt$

$= \int_0^\infty e^{-pt} d[\varphi(t)]$

$= [e^{-pt}\varphi(t)]\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt$

$= -\varphi(0) + p\mathcal{L}[\varphi(t)]$

$\mathcal{L}[\varphi''(t)] = -\varphi'(0) + p\mathcal{L}[\varphi'(t)]$

$= p^2\bar{\varphi}(p) - p\varphi(0) - \varphi'(0)$

归纳法: $\underline{\mathcal{L}[\varphi^{[n]}(t)] = p^n\mathcal{L}[\varphi(t)] - p^{n-1}\varphi(0) - p^{n-2}\varphi'(0) - \cdots - \varphi^{[n-1]}(0)}$

记忆方法: p 的幂次与 $\varphi^{[n]}$ 阶数和为 $n-1$
且 $\mathcal{L}[\varphi(t)]$ 视为 -1 次，从 $p^n\mathcal{L}[\varphi(t)]$ 开始

③ 积分定理 积分的 Laplace Trans. 会多一个 $\frac{1}{p}$ 系数

$\mathcal{L}[\overbrace{\int_0^t \varphi(t) dt}^{=\psi(t)}]$ 由此得 $\frac{d\psi(t)}{dt} = \varphi(t)$ 两边作 LT 变换:

$\mathcal{L}\left[\frac{d\psi(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[\varphi(t)]$

$= p\mathcal{L}[\psi(t)] - \underbrace{\psi(0)}_{=0}$ (导数定理)

$\therefore \mathcal{L}[\psi(t)] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[\varphi(t)]$ 即 $\mathcal{L}[\int_0^t \varphi(t) dt] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[\varphi(t)]$

例题: $Ay''(x) + By'(x) + Cy(x) = f(x)$

两边都做 LT 变换

左边 $= A(p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0)) + B(p\bar{y}(p) - y(0)) + C\bar{y}(p)$

右边 $= \bar{f}(p)$

整理得 $\bar{y}(p)[Ap^2 + Bp + C] = \bar{f}(p) + A[py(0) + y'(0)] - By(0)$ 右边已知，求 $\bar{y}(p)$

求出 $\bar{y}(p)$ 即为 $\mathcal{L}[y(x)]$ 逆变换 $y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(p)]$

④ $\mathcal{L}[t\varphi(t)] = \int_0^{\infty} t\varphi(t)e^{-pt}dt$

$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-pt}dt$

$= \bar{\varphi}(p)$

两边求导有：$\int_0^{\infty} t\varphi(t)e^{-pt}dt = -\frac{d\bar{\varphi}(p)}{dp}$ 即 $\mathcal{L}[t\varphi(t)] = -\frac{d\bar{\varphi}(p)}{dp}$

推广结论：$\mathcal{L}[t^n\varphi(t)] = (-1)^n \frac{d^n\bar{\varphi}(p)}{dp^n}$

已知 $\mathcal{L}[e^{st}] = \frac{1}{p-s}$

可得：$\mathcal{L}[te^{st}] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-s}\right) = \frac{1}{(p-s)^2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{st}] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[e^{st}]$

$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^2y''(x)] &= \frac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}[y''(x)] \\ &= \frac{d^2}{dp^2}\left(p^2\bar{y}''(p) + 4p\bar{y}'(p) + 2\bar{y}(p)\right) \\ &= \frac{d}{dp}\left(2p\bar{y}(p) + p^2\bar{y}'(p)\right) \\ &= 2\bar{y}(p) + 4p\bar{y}'(p) + p^2\bar{y}''(p)\end{aligned}$$

⑤ 相似性定理

$f(at) \doteq \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$

还有三大重要定理（位移定理、延迟定理、卷积定理）见下页

§6.2 Laplace 变换的反演（逆变换）

$\bar{\varphi}(p) \Longrightarrow \varphi(t)$

1) 常用结论

$\frac{1}{p^{n+1}} \doteqdot \frac{1}{n!}t^n$

$\frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteqdot \frac{1}{n!}t^n e^{st}$

$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteqdot \sin\omega t \qquad \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \doteqdot \operatorname{sh}\omega t = \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$

$\frac{p}{p^2+\omega^2} \doteqdot \cos\omega t \qquad \frac{p}{p^2-\omega^2} \doteqdot \operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{st}] = \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$

$\frac{1}{ap^2+bp+c} \doteqdot \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot \sin\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t$

配方，利用：$\mathcal{L}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$ 并且使用位移定理

例题：$\bar{\varphi}(p) = \frac{p^3+2p^2-9p+36}{p^4-81}$ 求原函数

$\bar{\varphi}(p) = \frac{\alpha p+\beta}{p^2-9} + \frac{\gamma p+\delta}{p^2+9}$

$= \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p^2+9} + \frac{Dp}{p^2+9}$

$= Ae^{3t} + Be^{-3t} + \frac{C}{3}\sin 3t + D\cos 3t$

2) 辅助定理

延迟定理 $\mathcal{L}[\varphi(t)] = \bar{\varphi}(p)$

$e^{-\tau p}\bar{\varphi}(p) \doteqdot \varphi(t-\tau)$ 必须 $t>\tau$

$\int_\tau^\infty \varphi(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \varphi(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau}d(t-\tau)$

$= e^{-p\tau}\cdot\bar{\varphi}(p)$

$\doteqdot \varphi(t-\tau)H(t-\tau)$

像函数多一个 $e^{-\tau p}$

原函数 t 变为 $t-\tau$

像加、原减

另一边乘 $e^{-\cdot t}$

（注意与傅里叶变换的性质区分开）

位移定理 $\bar{\varphi}(p+\lambda) \doteqdot e^{-\lambda t}\varphi(t)$

像函数 p 变为 $p+\lambda$，原函数多一个 $e^{-\lambda t}$ $\longrightarrow$ 常用于整体代换

卷积定理 $\bar{\varphi}_1(p)\bar{\varphi}_2(p) \doteqdot \int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau$

$= \int_0^t \varphi_1(t-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau$

证明

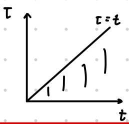
$\mathcal{L}\left[\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau\cdot e^{-pt}dt$

$= \int_0^\infty \varphi_1(\tau)\int_\tau^\infty \varphi_2(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt\,d\tau$

令 $t-\tau=\xi$ $= \int_0^\infty \varphi_1(\tau)\int_0^\infty \varphi_2(\xi)\cdot e^{-p(\xi+\tau)}d\xi\,d\tau$

$= \int_0^\infty \varphi_1(\tau)\cdot e^{-p\tau}\cdot\bar{\varphi}_2(p)d\tau$

$= \bar{\varphi}_1(p)\cdot\bar{\varphi}_2(p)$



例题：求 $\frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}$ 的原函数

已知 $\frac{1}{p} \doteqdot 1\ (H(t))$

$e^{-p\tau}\bar{\varphi}(p) \doteqdot \varphi(t-\tau)$

则有 $\frac{e^{-\alpha p}}{p} \doteqdot H(t-\alpha)$

又有 $\frac{1}{p+b} \doteqdot e^{-bt}$

由卷积定理，原式 $\doteqdot \int_0^t H(\tau-\alpha)e^{-b(t-\tau)}d\tau = \int_\alpha^t e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-bt}\cdot\frac{1}{b}e^{b\tau}\Big|_\alpha^t = \frac{1}{b}\left[1-e^{b(\alpha-t)}\right]\underline{H(t-\alpha)}$

$H(\ )$ 为阶跃函数 规定范围，不要漏掉

黎曼-梅林反演公式

$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_l e^{pt}\bar{\varphi}(p)dp$ （p 为复数）

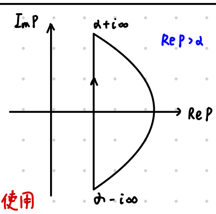
$\bar{\varphi}(p) = -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\bar{\varphi}(\xi)}{\xi-p}d\xi$

$R\to\infty$ 时 $\operatorname{Re}p>\alpha$

$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\bar{\varphi}(\xi)}{p-\xi}d\xi - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\bar{\varphi}(\xi)}{p-\xi}d\xi}_{=0}$

由于 $\frac{1}{p-\xi} \doteqdot e^{\xi t}$

$\therefore \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\xi t}\bar{\varphi}(\xi)d\xi$ 记住结论会使用即可



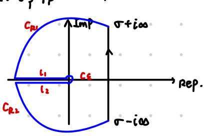
$\operatorname{Re}p>\alpha$ 才能保证 $\varphi(t)e^{-pt}$ 可积

例题：求 $\frac{1}{\sqrt{p}}$ 的原函数（$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$）

$\frac{1}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{\sqrt{p}}e^{pt}dp$

$p=0,\ \infty$ 为支点

积分路径必须绕开割线



关键在于合理构造回路

$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{\sqrt{p}}e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\int_l \underbrace{\frac{1}{\sqrt{p}}e^{pt}}_{f(p)}dp + \int_{C_{R_1}} f(p)dp + \int_{l_1} f(p)dp + \int_{l_2} f(p)dp + \int_{C_\varepsilon} f(p)dp + \int_{C_{R_2}} f(p)dp$

$=0$ （柯西定理，无奇点）

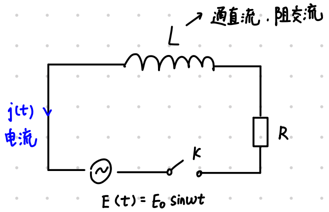
且有 $C_{R_1}, C_{R_2}, C_\varepsilon$ 的积分全为0。（$p=\rho e^{i\pi}$）

$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{\sqrt{p}}e^{pt}dp = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\rho e^{i\pi}}}{\sqrt{\rho e^{i\pi}}}d\rho e^{i\pi} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{\rho}}e^{i\pi/2}d\rho + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{\rho}}\cdot e^{3i\pi/2}d\rho$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{\rho}}d\rho$

令 $\sqrt{\rho}=x$ $= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-x^2t}}{x}d(x^2)$

$= \frac{2}{\sqrt{t}\cdot\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx = \frac{2}{\pi\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$



$$\begin{cases} L\dfrac{dj(t)}{dt} + Rj(t) = E_0 \sin\omega t \\ j(t)\big|_{t=0} = j(0) = 0 \end{cases}$$

利用拉普拉斯变换求解微分方程

上式两边作 LT

由于 $\mathcal{L}[j'(t)] = P\overline{j(P)} - \underbrace{\varphi(0)}_{}=0$ 被省略.

$\therefore L\cdot P\overline{j(p)} + R\,\overline{j(p)} = E_0 \cdot \dfrac{w}{w^2+p^2}$

$\overline{j(p)} = \dfrac{E_0 w}{L(p+R/L)(p^2+w^2)}$

卷积 + 公式套用

$j(t) = \dfrac{E_0}{L}\int_0^t \sin w\tau \, e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau$

$= \dfrac{E_0}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\underbrace{\int_0^t \sin w\tau \, e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau}_{I}$

分部积分

$I = \dfrac{L}{R}\int_0^t \sin w\tau \, d(e^{\frac{R}{L}\tau})$

$= \dfrac{L}{R}\left\{ \sin w\tau\, e^{\frac{R}{L}\tau}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} w\cos w\tau\, d\tau \right\}.$

$= \dfrac{L}{R}\left[\sin w\tau \; e^{\frac{R}{L}\tau} - \dfrac{L}{R} w\cos w\tau\, e^{\frac{R}{L}\tau}\right]\Big|_0^t + \dfrac{L^2}{R^2}w^2 \underbrace{\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin w\tau\, d\tau}_{I}$

$\therefore \left(1-\dfrac{L^2}{R^2}w^2\right) I = \dfrac{L}{R}\sin wt\cdot e^{\frac{R}{L}t} - \dfrac{L^2}{R^2} w\cos wt\cdot e^{\frac{L}{R}t} + \dfrac{L^2}{R^2} w$

可得 I. 代入得 j(t).

$\overline{j(p)} = \dfrac{E_0}{L}\cdot\dfrac{1}{p+R/L}\cdot\dfrac{w}{p^2+w^2}$

$\dfrac{1}{p+R/L} \rightarrow e^{-\frac{R}{L}t}$ 像函数

$\dfrac{w}{p^2+w^2} \rightarrow \sin wt$ 像函数

因此求 $\overline{j(p)}$ 的原函数 $j(t)$ 可用卷积公式

$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$

拉普拉斯变换求解微分方程

① 对方程两边施加 LT （一并考虑了初始条件）

② 变换后方程解出像函数

③ 反演得到原函数 （即为方程的解）

第七章 数学物理定解问题

定义：具有确定解的物理问题

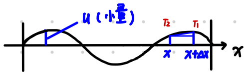
需要：给出运动规律、环境、初始状态　　要求：解必须存在、唯一、稳定

$\boxed{\text{泛定方程}} + \underbrace{\boxed{\text{边界条件}} + \boxed{\text{初始条件}}}_{\boxed{\text{定解条件}}} = \boxed{\text{定解问题}}$

（共性规律 ＋ 个性条件）

§7.1 方程的导出

（一）均匀弦的微小横振动（轻质柔软）



$$\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x,t)}{\Delta x}$$

$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$　　$\vec{F}=m\vec{a}$

假设α角足够小

水平方向无运动：$T_1\cos\alpha_1 - T_2\cos\alpha_2 = 0$　①

竖直方向分析：$T_1\sin\alpha_1 - T_2\sin\alpha_2 = \rho\Delta x\, u_{tt}(x,t)$　②

$(\vec{F}=m\vec{a})$

$$u_t(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$$　求偏导的简写

$$u_{tt}(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u_t(x,t+\Delta t)-u_t(x,t)}{\Delta t}$$

① 由于 $\alpha\to 0$ ∴ $\cos\alpha\approx 1 \longrightarrow T_1\approx T_2 = T$

② $\sin\alpha\approx\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$　∴ $T\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\rho\Delta x\,u_{tt}(x,t)$

$$\Rightarrow \frac{T}{\rho}\left(\frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right)=u_{tt}(x,t)$$　表示u对t求二阶偏导

整理得：$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{tt}(x,t)$　即 $u_{tt}-\frac{T}{\rho}u_{xx}=0$

令 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$　则方程变为 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$　$\boxed{f(x,t)=u_{tt}-a^2u_{xx}}$

若考虑高维波动：

$u_{tt}(\vec{r},t)-a^2\Delta u(\vec{r},t)=f(\vec{r},t)$

波动问题　$\boxed{u_{tt}-a^2u_{xx}=0}$

轻质弦才能忽略重力，否则需要加上

$u_{tt}-\frac{T}{\rho}u_{xx}-\beta\cdot u_x=0$　（β 为与 g 相关的系数）

并且还取决于弦放置方向（横、纵）

$\boxed{u_{tt}-a^2u_{xx}=g}$

拓展

$\mathcal{L}=T-V$　　拉格朗日分析法

$V=T(ds-dx)$

$L=\int\mathcal{L}\,dx=\int\frac{1}{2}\rho\,dx\,u_t^2-\frac{1}{2}T\,dx\,(u_x)^2$　（经小量分析）

$\mathcal{L}(u,u_t,u_x,x,t)$ 有 x,t 两个变量

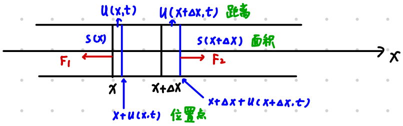
由欧拉-拉格朗日方程：$\underline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0}$

变为 $\rho u_{tt}-Tu_{xx}=0$　　可以通过量纲得到偏导对象

即 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$　（$a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$）

Lagrange equation of motion for continuous system

(二) 杆的纵振动



$$\boxed{\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta L}{L} \qquad \Delta L = \frac{1}{Y}\frac{FL}{S}}$$

$F = SYu_x$

$\vec{F_2} - \vec{F_1} = m\vec{a}$ ①

$= S(x)\Delta x\rho\, u_{tt}(x,t)$

根据 $\frac{F}{S} = \sigma = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\frac{\Delta u}{\Delta x}$

$\therefore F = SYu_x$ （Y为杨氏模量）

代入①式得 $YS(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t) - YS(x)u_x(x,t) = S(x)\rho\Delta x\, u_{tt}(x,t)$

即 $\frac{Y}{\rho S}\frac{\partial(Su_x)}{\partial x} = u_{tt}(x,t)$

$\therefore u_{tt} - \frac{Y}{\rho S}\frac{\partial(Su_x)}{\partial x} = f(x,t)$

$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t)$ 为受迫纵振动方程

其中 $a = \sqrt{E/\rho}$ $f(x,t) = F(x,t)/\rho$

或写成

$u_{tt} - \frac{Y}{\rho}u_{xx} - \frac{Y}{\rho S}\frac{dS(x)}{dx}u_x = f(x,t)$

$u_{tt} - a^2u_{xx} - a^2\cdot\frac{2}{x}u_x = f(x,t)$ 前提 $S = Ax^2$ （$a = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$）

(三) 声波方程

气体运动 ⟶ 密度变化 ⟶ 压强变化 （压强变化 → 气体运动）

声音强度 $I = 20\log_{10}\left(\frac{P_e}{P_{ref}}\right)$ db（分贝）

$P_{ref} = 2\times10^{-10}$ bar

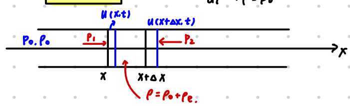
$I = 120$ db 时 ⇒ $P_e = 2\times10^{-4}$ bar 为扰动压强

$P = P_0 + P_e$ （$P_e \ll P_0$）

P是ρ的函数 $P(\rho) = P_0 + P_e = f(\rho_0+\rho_e)$

$= f(\rho_0) + \underbrace{f'(\rho_0)}_{\kappa}\rho_e$ —阶小量

$\boxed{P_e = \kappa\rho_e}$ $\kappa = \left.\frac{dP(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}$



推导

$P_1 = P_0 + P_e(x,t)$

$P_2 = P_0 + P_e(x+\Delta x,t)$

建立方程: $P_1S - P_2S = \rho_0\Delta x\cdot S\, u_{tt}$

即 $P_1 - P_2 = \rho_0\Delta x\cdot u_{tt}$

$\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{P_e(x,t) - P_e(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = u_{tt}$

左边 $= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\kappa\frac{\partial\rho_e}{\partial x}$ ①

$\rho_0\Delta x\cdot S = (\rho_0+\rho_e)(\Delta x+\Delta u)\cdot S$

$\therefore \rho_0 = (\rho_0+\rho_e)(1+\frac{\partial u}{\partial x})$

$= (\rho_0+\rho_e) + \rho_0u_x + \underbrace{\rho_eu_x}_{\text{太小可忽略}}$

$\therefore \rho_e + \rho_0u_x = 0$

$\rho_e = -\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}$ 代入①式得 $\kappa\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = u_{tt}$

则有最终结果为 $\boxed{u_{tt} - \kappa u_{xx} = 0}$ （$\kappa = \frac{\partial P}{\partial\rho} = C_s^2$）

$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$

(四) 电磁波传播方程

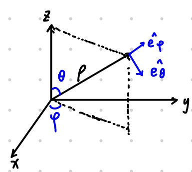
麦克斯韦方程组（微分形式）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$\vec{E}$与$\vec{B}$关联

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \hat{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{e_\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \hat{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{e_\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e_\varphi}\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

球坐标下画图分析



推导

$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla\cdot\nabla\vec{E}$

$= \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \Delta\vec{E}$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + u(r)\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

两边联立得:

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$

若在真空中: $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta\vec{E} = 0$

考虑一维情况: $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = 0$

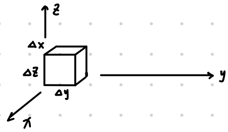
$$\boxed{\vec{E}_{tt}(\vec{r},t) - c^2\Delta\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0^2}\nabla\rho - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} \equiv \vec{f}(\vec{r},t)}$$

真空中的电磁波一定是横波

但非真空的电磁扰动可能纵波横波都有

静电波 $\vec{B} = c.$ $\vec{E}(x,t)$

(五) 输运方程



$$\vec{q} = -k\nabla u$$

① 扩散

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$= \frac{u(x,y,z,t+\Delta t)-u(x,y,z,t)}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

进一步分析. 上式

$$= \frac{\Delta N}{\Delta t} = q_x|_x\,\Delta y\Delta z - q_x|_{x+\Delta x}\,\Delta y\Delta z + q_y|_y\,\Delta x\Delta z - q_y|_{y+\Delta y}\,\Delta x\Delta z + q_z|_z\,\Delta x\Delta y - q_z|_{z+\Delta z}\,\Delta x\Delta y + f(x,y,z,t)\,\Delta x\Delta y\Delta z$$

化简得 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(x,y,z,t)$

即得方程:

$$u_t - \nabla\cdot(D\Delta u) = f(\vec{r},t)$$

若 D与空间无关, 可写为

$$u_t - D\Delta u = f(\vec{r},t)$$

扩散系数 D.的输运方程

② 热传导

对于热传导 $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c\rho\frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z$ $\boxed{\text{分析过程同上}}$

最后可得 $u_t - \frac{k}{c\rho}\Delta u = \frac{1}{c\rho}f(\vec{r},t)$ 热传导系数 k

若温度稳定 $u_t = 0$

$$\Downarrow$$

$\Delta u = \varphi(\vec{r})$ 泊松方程

(补充) 核反应

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = \nabla(D\nabla u)\Delta x\Delta y\Delta z + (\beta u)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = \beta u$$

(六) 稳定场分布

$$\Delta u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

§7.2 定解条件

一、初始条件

1) 初始位移

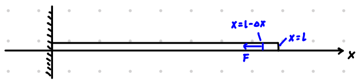
$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u(\vec{r},t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r})$$

2) 初始速度

$$u_t(\vec{r},t)|_{t=0} = \psi(\vec{r})$$

二、边界条件



边界条件需对全时间成立
只有 $t=0$ 可以不考虑
（交由初始条件）

杆的振动：$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件：① $u|_{x=0} = 0$

第一类边界条件
（固定边界条件）

$$\begin{cases} 0 - F|_{x-\Delta l} = S\Delta x \rho \cdot u_{tt}|_{x=l} \\ \frac{F}{S} = Y\frac{\Delta l}{l} \end{cases}$$

即 $0 - YSu_x|_{x-\Delta l} = S\Delta x\rho\cdot u_{tt}|_{x=l} \Longrightarrow 0$

② ∴ $u_x|_{x=l} = 0$

第二类边界条件
（自由边界条件）

若杆右侧连接弹簧

$F_弹 = -ku|_{x=l}$

$-ku|_{x=l} - YSu_x|_{x=l-\Delta x} = S\Delta x\rho u_{tt}|_{x=l}$

$\Delta x \to 0$ 时有 $u|_{x=l} + \frac{YS}{k}u_x|_{x=l} = 0$

③ 即 $\left(u + \frac{YS}{k}u_x\right)\Big|_{x=l} = 0$

第三类 齐次边界条件

eg：热输运

$$\vec{q} = -k\nabla u$$

对于绝热端墙体 $\vec{q} = 0$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$ （考虑一维）

$u_x|_{x=l} = 0$

考虑流入流出：

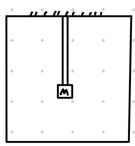
$-\beta(u|_{x=l} - u_0) - ku_x|_{x=l-\Delta x}$

$= S\rho\Delta x u_t C$ 当 $\Delta x \to 0$ 上式 $\to 0$

整理得 $\left(u + \frac{k}{\beta}u_x\right)\Big|_{x=l} = u_0$

第三类边界条件是一、二类条件的组合

例题



h 为最大伸长量，l 为原长

$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}kh^2$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \frac{h}{l}x \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$ 初始条件

$u|_{x=0} = 0$ 边界条件

$F|_{x=l} - F|_{x=l-\Delta x} = \rho S\Delta x u_{tt}|_{x=l} \longrightarrow 0 \quad (\Delta x \to 0)$

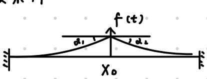
（其中 $Mg - F|_{x=l} = M\cdot u_{tt}|_{x=l}$

$F|_{x=l-\Delta x} = YSu_x|_{x=l-\Delta x}$ ）

$Mg - Mu_{tt}|_{x=l} - YSu_x|_{x=l} = 0$

整理得 $\left(u_x + \frac{M}{YS}u_{tt}\right)\Big|_{x=l} = \frac{Mg}{YS}$ （第三类边界条件）

三、衔接条件



分成两个部分

$u_{tt}^{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{I}}^2 u_{xx}^{\mathrm{I}} = 0$ ①

$u_{tt}^{\mathrm{II}} - a_{\mathrm{II}}^2 u_{xx}^{\mathrm{II}} = 0$ ②

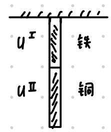
$a_{\mathrm{I}} = a_{\mathrm{II}}$

衔接位置 $u^{\mathrm{I}}|_{x=x_0^-} = u^{\mathrm{II}}|_{x=x_0^+}$ ③

$T_1\cos\alpha_1 = T_2\cos\alpha_2$

$T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 = f(t)$

$T\left(u_x^{\mathrm{I}}|_{x=x_0^-} - u_x^{\mathrm{II}}|_{x=x_0^+}\right) = f(t)$ ④



$F = SYu_x$

$Y_{\mathrm{II}}u_x^{\mathrm{II}}|_{x=\frac{l}{2}^+} - Y_{\mathrm{I}}u_x^{\mathrm{I}}|_{x=\frac{l}{2}^-} = \rho S\Delta x u_{tt}|_{x=\frac{l}{2}}$

$\Delta x \to 0$ 时上式 $\to 0$

§7.3 行波法求解波动问题

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0}, & -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$\boxed{\xi = x - vt}$

$u(x,t) = u(\xi)$ 物理角度求解 $\xi = x - vt$

$$u_t = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t} = -v\frac{du}{d\xi}$$

$$u_{tt} = -v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{du}{d\xi}\right) = v^2\frac{d^2u}{d\xi^2}$$

$$u_x = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}$$

$$u_{xx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$$

代入波动方程

$$v^2\frac{d^2u}{d\xi^2} - a^2\frac{d^2u}{d\xi^2} = 0$$

$\therefore v^2 = a^2$ 即 $v = a$ 或 $v = -a$.

$\boxed{u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) \text{ 为通解}}$

再通过初始条件解出 f, g 的具体形式

若单纯从数学角度求解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0 \quad \text{不妨作代换}$$

$x = a(\xi+\eta)$, $t = \xi - \eta$

此时 $\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial\eta} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)$

方程变为 $\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u = 0$ 为书写方便. 让 $x = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $t = \frac{1}{2a}(\xi-\eta)$

即 $\xi = x + at$. $\eta = x - at$. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$

先对 η 积分. 再对 ξ 积分. 得 $u = f(x-at) + g(x+at)$

也可写为 $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ 同上

接下来分析初始条件: $f(x-at)$. $g(x+at)$

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x)$$

$$u_t|_{t=0} = \frac{df}{d\xi}(-a)\Big|_{\xi=x} + \frac{df}{d\eta}(a)\Big|_{\eta=x}$$

$$= -a\frac{df(x)}{dx} + a\frac{dg(x)}{dx}$$

$$= \psi(x)$$

积分得 $-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}\psi(x)dx + C$

已知有 $f(x) + g(x) = \varphi(x)$

解得
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi - \frac{C}{2} \\ g(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\psi(x)dx + \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x) \end{cases}$$

$\therefore u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ 需要对 x 作替换

$$= \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad (\tfrac{C}{2}\text{ 抵消})$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

只要知道初始条件 (位移, 速度)
即可解出确定的波函数 ← 达朗贝尔公式

$\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi$.

则 $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \Phi(x+at) - \Phi(x-at)$

$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad \text{称为达朗贝尔公式}}$

注意: 此公式方法仅适用于波动问题

例题

$u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin u$ sine-Gordon方程

$$u'\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{\sin u}{v^2-a^2}u'$$

$$\left[\frac{1}{2}(u')^2\right]' = -\left(\frac{\cos u}{v^2-a^2}\right)'$$

$$\frac{du}{d\xi} = \sqrt{C - \frac{2\cos u}{v^2-a^2}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{\ }} = d\xi$$

下面讨论上述分析能否用于半无限情形

$u|_{x=0} = 0$

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0}, & 0 < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

① 半无限长弦 $u|_{x=0} = 0$ 进行奇延拓

$u(x,t) = u(-x,t)$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \varphi(x). & x>0 \\ -\varphi(-x). & x<0 \end{cases}$$

$$u_t|_{t=0} = \begin{cases} \psi(x). & x>0 \\ -\psi(-x). & x<0 \end{cases}$$

整个系统具有反对称性

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. & t < \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. & t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

② $u_x|_{x=0}=0$ （半无限长杆） 进行偶延拓

先进行延拓（分段）
再对达朗贝尔公式的积分限分析
进行处理后即得到变式

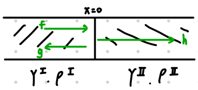
$$u|_{t=0} = \begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$u_t|_{t=0} = \begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & t<\frac{x}{a}\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\,d\xi, & t>\frac{x}{a}\end{cases}$$

整个系统具有 对称性

③ 跃变点的反射



$$\begin{cases}u_{tt}^{I}-a_{I}^{2}u_{xx}^{I}=0\\ u_{tt}^{II}-a_{II}^{2}u_{xx}^{II}=0\end{cases}$$

$x<0$

$u^{I}|_{t=0}=f(x-a^{I}t)$

$x>0$

$u^{II}(x,t)=h\left(t-\frac{x}{a_{II}}\right)$ 透射波

$x<0$

$u^{I}(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a_{I}}\right)+g\left(t+\frac{x}{a_{I}}\right)$

入射波 反射波

衔接条件：

$$u^{I}(x,t)|_{x=0}=u^{II}(x,t)|_{x=0}$$

$$\gamma^{I}S\,u_x^{I}(x,t)|_{x=0}=\gamma^{II}S\,u_x^{II}(x,t)|_{x=0}$$

初始条件：

$$u^{II}|_{t=0}=0,\quad u_t^{II}|_{t=0}=0$$

$f(t)+g(t)=h(t) \quad (t>0)$

$-\frac{1}{a_{I}}\gamma^{I}f'(t)+\frac{1}{a_{I}}\gamma^{I}g'(t)=-\frac{1}{a_{II}}\gamma^{II}h'(t) \quad (t>0)$

积分得 $-\frac{1}{a_{I}}\gamma^{I}f(t)+\frac{1}{a_{I}}\gamma^{I}g(t)=-\frac{1}{a_{II}}\gamma^{II}h(t)+C$ （常数） $(t>0)$

解得 $h(\xi)=\frac{2a_{II}\gamma^{I}}{a_{II}\gamma^{I}+a_{I}\gamma^{II}}f(\xi)$ （透射）

$g(\xi)=\frac{a_{II}\gamma^{I}-a_{I}\gamma^{II}}{a_{II}\gamma^{I}+a_{I}\gamma^{II}}f(\xi)$ （反射）

第八章　分离变量法求解定解问题

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ①

$u|_{x=0} = 0$ ②

$u|_{x=l} = 0$ ③

$u|_{t=0} = \varphi(x)$ ④

$u_t|_{t=0} = \psi(x)$ ⑤

$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$

$u|_{x=0} = f(-at) + g(at) = 0$

$\therefore g(at) = -f(-at)$

$\therefore u(x,t) = f(x-at) - f(-x-at)$

又有 $u|_{x=l} = 0$

即 $f(l-at) = f(-l-at)$　即 f 周期为 $2l$

$\sin\frac{n\pi}{l}(x+2l)$

$= \sin(\frac{n\pi}{l}x + 2n\pi)$

$= \sin\frac{n\pi}{l}x$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}(x-at) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi}{l}(x-at)$

再根据初始、边界条件进一步确定系数

两端固定的弦、杆振动　偏微分 ⟶ 常微分思路

$u(x,t) = X(x)T(t)$　分离变量

由上式条件① 有 $X(x)T''(t) - a^2T(t)X''(x) = 0$

即 $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$　要对任意 x.t 都满足　只能比值为常数　为分析方便，常数为 $-\lambda$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$　⑥

$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$　⑦

$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$　由于不可能 $T(t)$ 恒为0，故有 $X(0)=0$　同理 $X(l)=0$

⑥：$X''(x) + \lambda X(x) = 0$　且有 $X(0) = X(l) = 0$

1) $\lambda = 0$

则 $X(x) = bx + c$　得出 $c=0$, $b=0$　只是平庸解，舍去（没有物理现实意义）

2) $\lambda < 0$

$X(x) = ce^{-\sqrt{-\lambda}x} + de^{\sqrt{-\lambda}x}$　由 $X(0)=0$ 得 $c+d=0$

$\therefore X(x) = c(e^{-\sqrt{-\lambda}x} - e^{\sqrt{-\lambda}x})$　再由 $X(l)=0$ 得 $c=0$　$\therefore d=-c=0$　也是平庸解，舍去

3) 综合上述分析，$\lambda > 0$ 一定成立

$X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = B = 0$ 且 $X(l) = A\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ $(A \neq 0)$　此时要有 $\sqrt{\lambda}l = n\pi$　$\therefore \lambda = (\frac{n\pi}{l})^2$ $(n \in Z)$

$\therefore \boxed{X(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x}$　本征函数（对一个特定λ）

λ 称为本征值，由泛定方程和边界条件可确定　最好直接记住

⑦ $T''(t) + a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t) = 0$

$T_n(t) = C_n\sin\frac{an\pi}{l}t + D_n\cos\frac{an\pi}{l}t$　$(+T_{特解})$

综合有 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{an\pi}{l}t + D_n\cos\frac{an\pi}{l}t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$　①

初始条件：$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$

应有

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \underbrace{\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx}_{\frac{l}{2}\delta_{n,k}} = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

根据正交性

两边同时用 $\sin\frac{k\pi}{l}x$ 积分　作用：求出 D_n

上式化简为 $\frac{l}{2}D_k$ ⟹ $D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$　（上式的 k 换成 n，对应即可）

同时 $u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\frac{an\pi}{l}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$　对①式操作

同理 $\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\boxed{\sin\frac{k\pi}{l}x}\,dx = \frac{l}{2}\delta_{n,k}$　正交性

得到 $C_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

综上，C_n、D_n 求得，可求 $u(x,t)$　满足定解问题条件 $u(x,t)$

傅里叶级数法（可解非齐次）

$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$

思考：上述方法解题前提 $u(x,t)=X(x)T(t)$

或者是 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$

对于方程非齐次、边界齐次的问题

用傅里叶级数法

傅里叶级数法

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad ①$$
$$u|_{x=0}=0 \quad ②$$
$$u|_{x=l}=0 \quad ③$$
$$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad ④$$
$$u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad ⑤$$

边界条件一定要齐次。

$u(x,t)$ 可以以 x 为变量，t 作为参量，作傅里叶级数展开。

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 也满足边界条件。

代入 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ 有：　此时是非齐次方程，不能分离变量

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right]\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$$

（关键是要找什么样的基）

即 $T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t)$

$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

先根据边界条件找基 $X_n(x)$

基可以是 sin、cos 的线性组合。

再把基代回泛定方程求 $T_n(t)$。

第二类边界条件

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad ①$$
$$u_x|_{x=0}=0 \quad ②$$
$$u_x|_{x=l}=0 \quad ③$$
$$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad ④$$
$$u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad ⑤$$

① 右边 $=0$ 则可以分离变量

$u(x,t)=X(x)T(t)$

$\therefore \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \quad (\lambda>0)$

$X''(x)+\lambda X(x)=0$

$X'(0)=X'(l)=0$

对应的形式应该为 $X(x)=B\cos\frac{n\pi}{l}x$. 找到了基和本征值 $\left(\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)$

则 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$

代入①式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\cos\frac{n\pi}{l}x+a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cos\frac{n\pi}{l}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right]\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$$

即 $T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t)$

$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$

$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$

第三类边界条件

$$\begin{cases}X(0)=0\\ X'(l)=0\end{cases}$$

此时若要满足边界条件

令 $X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x \quad (B=0)$

$X'(l)=A\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0 \quad (A\neq0)$

$\therefore \sqrt{\lambda}l=(n+\frac{1}{2})\pi$

可以直接记结论 $\therefore \boxed{\lambda=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}}$

$\therefore u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

再代入方程得到 $T_n(t)$ 关系式并解出

具体过程见下下页

例

$\longrightarrow (u+Hu_x)|_{x=0}=0$

$u(x,t)=\sum T_n(t)\underbrace{[\cos wx+c\sin wx]}_{X(x)}$

$X(0)+HX'(0)=0 \rightarrow c=-\frac{1}{Hw}$

$u|_{x=l}=0$

$\cos wl-\frac{1}{Hw}\sin wl=0 \Rightarrow w_n$

条件 $\sum_{n=1}T_n''(t)[\cos w_nx-\frac{1}{Hw_n}\sin w_nx]+\sum_{n=1}^{\infty}a^2w_n^2T_n(t)[\cos w_nx-\frac{1}{Hw_n}\sin w_nx]$

$=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)[\cos w_nx-\frac{1}{Hw_n}\sin w_nx]$

特定形式记结论

对于非齐次方程（输运）

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

不妨仍进行 分离变量 $u(x,t) = X(x)T(t)$

$T'(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x)$

$\therefore \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

即 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$

仍然可以得到 $X(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x$

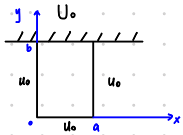
$T_n'(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0$

$\therefore T_n(t) = T_特 + C_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2} t}$

$u(x,0) = \sum [C_n + T_特(0)] \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x)$

$\therefore C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi}{l} x\, dx - T_特(0)$

代入求出 $T(t)$ 最后得 $u(x,t)$



$\Delta u = 0$

$u|_{x=0} = u_0$

$u|_{x=a} = u_0$

$u|_{y=0} = u_0$

$u|_{y=b} = U_0$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

不妨令 $u = v + u_0$

则 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ ①

$v|_{x=0} = v|_{x=a} = 0$

$v|_{y=0} = 0.$

$v|_{y=b} = U_0 - u_0$

$v(x,y) = X(x)Y(y)$

代入①得 $X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$

$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2})$

$\therefore X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$X(0) = X(a) = 0$ 可得到 $X(x) = A \sin \frac{n\pi}{a} x$ （n为整数） $\longrightarrow$ 得到 $X(x)$

$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin\frac{n\pi}{a} x$

$Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y_n(y) = 0$ 先确定形式

可得 $Y_n = C_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} + D_n e^{\frac{n\pi}{a} y}$ 记结论

$v|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin\frac{n\pi}{a} x = 0$

$\therefore C_n + D_n = 0. \quad D_n = -C_n$

$\therefore Y_n = C_n (e^{-\frac{n\pi}{a} y} - e^{\frac{n\pi}{a} y})$

$v|_{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{-\frac{n\pi}{a} b} - e^{\frac{n\pi}{a} b}) \sin\frac{n\pi}{a} x = U_0 - u_0.$

即 $-2C_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a}\int_0^a (U_0 - u_0) \sin\frac{n\pi}{a} x\, dx.$

最终得 $C_n = -\frac{(U_0 - u_0)}{n\pi \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b}[1 - (-1)^n]$ $\longrightarrow$ 得到 Y_n.（只留奇数项即可）

代入，最终得 $u = u_0 + \frac{4(U_0 - u_0)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{a} b}{(2k+1)\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{a} b} \cdot \sin\frac{(2k+1)}{a}\pi x$

若 $u = v + A + By$ 待定系数

$y = 0$ 时 $u = u_0$, $v|_{y=0} = 0 \longrightarrow A = u_0.$

$y = b$ 时 $u = U_0 \rightarrow B = \frac{U_0 - u_0}{b}$

$\therefore u = v + u_0 + \frac{U_0 - u_0}{b} y$

$v = u - u_0 - \frac{U_0 - u_0}{b} y$

$$\begin{cases} v|_{y=0} = u|_{y=0} - u_0 = 0 \\ v|_{y=b} = 0 \\ v|_{x=0} = -\frac{U_0 - u_0}{b} y \\ v|_{x=a} = -\frac{U_0 - u_0}{b} y \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad ② \end{cases}$$

$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin\frac{n\pi}{b} y$

代入②得 $X_n''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0$

$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{b} x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b} x}$

同理求出 C_n, D_n

从而得出 $X(x)$

最后得到 $u(x,y)$

先经过一次变换得到齐次，再利用分离变量法

例. 热传导问题　　**第三类边界条件**

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (\text{假设无热源}, \ a = \frac{k}{c\rho}) \\ u|_{x=0} = 0 \\ \boxed{\Gamma = -k\nabla u} \ \ \text{分析热量出入:} \ -k u_x|_{x=l} = h(u|_{x=l} - \theta) \\ \quad h\text{为热交换系数}, \ \theta\text{为外温} \quad \text{令} \ \frac{k}{h} = H \\ (u + H u_x)|_{x=l} = 0 & (\text{假设外温为}0) \ (\text{边界条件}) \\ u|_{t=0} = u_0 & (\text{初始条件}) \end{cases}$$

$u(x,t) = X(x)T(t)$

代入有 $X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$

$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

通解 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

$u|_{x=0} = 0 \longrightarrow B = 0$

$(u + Hu_x)|_{x=l} = A\sin\sqrt{\lambda}l + HA\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l$

$= A(\sin\sqrt{\lambda}l + H\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) = 0$

由于 $A \neq 0$ (B已经为0)　∴ $\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{H}{l}\cdot\sqrt{\lambda}l$

$\sqrt{\lambda_n}\,l = \gamma_n$　应满足 $\tan\gamma_n = -\frac{H}{l}\gamma_n$　①

∴ $\lambda_n = (\frac{\gamma_n}{l})^2$ 为本征值

∴ $X(x) = A\sin\frac{\gamma_n}{l}x$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot\sin\frac{\gamma_n}{l}x$　(A作为常数并到C_n里求)

$T_n'(t) + a^2\frac{\gamma_n^2}{l^2}T_n(t) = 0$

得 $T_n = C_n e^{-\frac{a^2\gamma_n^2}{l^2}t}$

∴ $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2\gamma_n^2}{l^2}t}\cdot\sin\frac{\gamma_n}{l}x$

那 $u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{\gamma_n}{l}x = u_0$　　积分法求 C_n

∴ $\int_0^l \sin\frac{\gamma_n}{l}x\cdot\sin\frac{\gamma_k}{l}x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\cos\frac{\gamma_n-\gamma_k}{l}x - \cos\frac{\gamma_n+\gamma_k}{l}x\right]dx$　☆

$= \frac{l}{2}\left[\frac{1}{\gamma_n-\gamma_k}\sin(\gamma_n-\gamma_k) - \frac{1}{\gamma_n+\gamma_k}\sin(\gamma_n+\gamma_k)\right]$

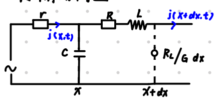
公式展开 再由① 得 $\sin\gamma_n = -\frac{H}{l}\gamma_n\cdot\cos\gamma_n$

代换得 上式 $= -\frac{H}{2}(\cos\gamma_n\cos\gamma_k - \cos\gamma_n\cos\gamma_k) = 0$

$K \neq n$ 时 全部为0, $k = n$ 才保留, 可求出 C_n

最终得　$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0(1-\cos\gamma_n)}{\gamma_n - \sin\gamma_n\cos\gamma_n}e^{-\frac{a^2\gamma_n^2}{l^2}t}\cdot\sin\frac{\gamma_n}{l}x$

例:　传输线问题



单位长度 电阻 R
电容 C
电感 L
电漏 G ⟶ 漏出电流I与电压U的比值

边界条件:　$V|_{x=0} = E(t) - rj(t)|_{x=0}$

$j|_{x=l} = 0$

方程:

$j = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(dx\cdot CV) = C\,dx\cdot V_t$

$$\begin{cases} j(x,t) - C\,dx\,V_t - V(x,t)G\,dx = j(x+dx,t) & \text{分流} \\ V(x,t) - R\,dx\,j(x,t) - L\,dx\,j_t(x,t) = V(x+dx,t) & \text{分压} \end{cases}$$

整理得: $\boxed{\begin{aligned} j_x(x,t) &= -CV_t - GV(x,t) \\ V_x(x,t) &= -Rj(x,t) - Lj_t(x,t) \end{aligned}}$

$j_{xx}(x,t) = -CV_{xt} - GV_x$

$= -C(-Rj_t - Lj_{tt}) - G(-Rj - Lj_t)$

即 $LCj_{tt} - j_{xx}(x) + (GL + RC)j_t + GRj = 0$

$V_{xx} = -Rj_x - Lj_{xt} = -R(-CV_t - GV) - L(-CV_{tt} - GV_t)$

即 $\boxed{\begin{aligned} &LCV_{tt} - V_{xx} + (RC + GL)V_t + RGV = 0 \\ &LCj_{tt} - j_{xx} + (RC + GL)j_t + RGj = 0 \end{aligned}}$　①

$j(x,t) = \tilde{j}(x,t)e^{-\alpha t}$

$j_t = \tilde{j}_t e^{-\alpha t} - \alpha\tilde{j}e^{-\alpha t}$

$j_{tt} = \tilde{j}_{tt}e^{-\alpha t} - 2\alpha\tilde{j}_t e^{-\alpha t} + \alpha^2\tilde{j}e^{-\alpha t}$

$j_{xx} = \tilde{j}_{xx}e^{-\alpha t}$

代入得:　$LC[\tilde{j}_{tt} - 2\alpha\tilde{j}_t + \alpha^2\tilde{j}] - \tilde{j}_{xx} + (RC + GL)(\tilde{j}_t - \alpha\tilde{j}) + RG\tilde{j} = 0$

$\alpha = \frac{RC+GL}{2LC}$　代入得 ①变为:

$\boxed{LC\tilde{j}_{tt} - \tilde{j}_{xx} - (LC\alpha^2 - RG)\tilde{j} = 0}$　(令 $LC\alpha^2 - RG = \beta$)

$\tilde{j}(x,t) = X(x)T(t)$　分离变量

代入得　$LCT''(t)X(x) - X''(x)T(t) - \beta X(x)T(t) = 0$

即 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{LCT''(t)}{T(t)} - \beta = -\lambda$

∴ $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$LCT''(t) + (\lambda - \beta)T(t) = 0$

边界条件非齐次
需要加入 8.3节 …

§ 8.3 非齐次边界条件的处理

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$
$$\left.\begin{aligned} u|_{x=0} &= \mu(t) \\ u|_{x=l} &= \nu(t) \end{aligned}\right\rangle \text{边界非齐次}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

例题思路

设 $u(x,t) = V(x,t) + \mu(t) + \frac{x}{l}[\nu(t) - \mu(t)]$

$u|_{x=0} = V|_{x=0} + \mu(t) \overset{\text{条件}}{=\!=} \mu(t)$

得到 $V|_{x=0} = 0$

$u|_{x=l} = V|_{x=l} + \nu(t) \overset{\text{条件}}{=\!=} \nu(t)$

得到 $V|_{x=l} = 0$

$u(x,t)$ 代入泛定方程：

$V_{tt} + \mu''(t) + \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] - a^2 V_{xx} = f(x,t)$

由此得出关于 $V(x,t)$ 的定解问题

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = f(x,t) - \mu''(t) - \frac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] = \tilde{f}(x,t)$$
$$V|_{x=0} = 0$$
$$V|_{x=l} = 0$$
$$V|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x)$$
$$V_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x)$$

从而转化为齐次边界问题

一般解法：设 $u(x,t) = V(x,t) + (Ax+B)\mu(t) + (Cx^2+Dx)\nu(t)$ "待定系数法"

经过变换使 $v(x,t)$ 具有齐次边界 → 找基，求本征值和本征函数 → 两边进行傅里叶级数展开

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$
$$u_x|_{x=0} = \mu(t)$$
$$u|_{x=l} = \nu(t)$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$u(x,t) = V(x,t)$

第二类

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u_x|_{x=0} = \mu(t) \\ u|_{x=l} = \nu(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x,t) + x\mu(t) + \frac{x^2}{l^2}[\nu(t) - l\mu(t)]$

$v|_{x=0} = 0$

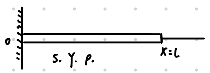
$v|_{x=l} = 0$

$u_t - a^2 u_{xx} = v_t - a^2 v_{xx} + x\mu'(t) + \frac{x^2}{l^2}[\nu'(t) - l\mu'(t)] - a^2\frac{2}{l^2}[\nu(t) - l\mu(t)] = f(x,t)$

变成 ↓

$v_t - a^2 v_{xx} = \hat{f}(x,t)$

例.



作用在端点

泛定方程： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件： $u|_{x=0} = 0$

$\frac{F}{S} = Y u_x$ ⟶ $SYu_x|_{x=l} = A\sin\omega t$

（即 $u_x|_{x=l} = \frac{A\sin\omega t}{SY}$）

$u|_{t=0} = 0$

$u_t|_{t=0} = 0$

法一

$u(x,t) = V(x,t) + x\cdot\frac{A}{YS}\sin\omega t$

代入泛定方程，

$V_{tt} - x\frac{A}{YS}\omega^2\sin\omega t - a^2 V_{xx} = 0$

$\therefore V_{tt} - a^2 V_{xx} = x\frac{A}{YS}\omega^2\sin\omega t$ 为新方程.

$V|_{x=0} = 0$

$V_x|_{x=0} = 0$

$V|_{t=0} = 0$

$V_t|_{t=0} = -\frac{A\omega}{YS}x$

$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$

sin 形式，$\omega_n = \frac{2n+1}{2L}$

由边界条件确定

重新代入泛定方程，可求出 $T_n(t)$

即得 $v(x,t)$，最终得 $u(x,t)$

法二

$u(x,t) = V(x,t) + f(x)\sin\omega t$

根据条件： $f(0) = 0 \quad (u|_{x=0} = 0)$

$f'(l) = \frac{A}{SY} \Rightarrow V_x|_{x=l} = 0$

代入泛定方程：

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = V_{tt} - \omega^2 f(x)\sin\omega t - a^2 V_{xx} - a^2 f''(x)\sin\omega t = 0$

$\therefore f''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}f(x) = 0 \qquad \therefore \boxed{f(x) = D\sin\frac{\omega}{a}x}$

又 $f'(l) = D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}l = \frac{A}{SY}$

$\therefore D = \frac{A}{SY}\cdot\frac{a}{\omega}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}$ 　因此 $f(x) = \frac{A}{SY}\cdot\frac{a}{\omega}\cdot\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}$

此时 $u(x,t) = V(x,t) + \frac{A}{SY}\cdot\frac{a}{\omega}\cdot\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t$

$V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0$

$V|_{x=0} = 0$

$V_x|_{x=l} = 0$

$V|_{t=0} = 0$

$V_t|_{t=0} = -\frac{Aa}{SY}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}$

$X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$

由边界条件得出

因此 $V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$

再代入关于 V 的泛定方程

$T_n''(t) + a^2\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}T_n(t) = 0$

$T_n(t) = \tilde{C}_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2L}t$

$V(x,t)$ 写出

再利用 $V_t|_{t=0}$

最后解出 $\tilde{C}_n$，即得 $V(x,t) \longrightarrow u(x,t)$

事实上，此类问题有通用方法

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

$u|_{x=0} = \mu(t)$

$u_x|_{x=l} = \nu(t)$

都可令 $u(x,t) = V(x,t) + f(x)\mu(t) + g(x)\nu(t)$

需有 $f(0) = 1$. $g(0) = 0$.

$f'(l) = 0$. $g'(l) = \nu(t)$ 　即可齐次化边界

总结

一维问题

① 边界齐次化

② 假设方程齐次，即可解出本征值和本征函数

③ 非齐次方程对两边用本征函数展开

④ 得到非齐次常微分方程（可解）

⑤ 积分常数由初始条件确定

极坐标下问题

$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0$

边界条件 $U|_{x^2+y^2\le a^2} = 0$ （ a 为圆柱体半径 ）

导体为等势体

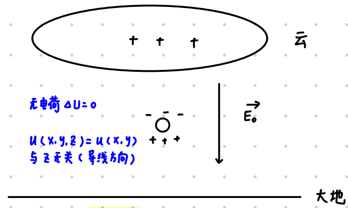
比较适用极坐标系 （$x = \rho\cos\varphi$. $y = \rho\sin\varphi$ ） $u(x,y) \to u(\rho,\varphi)$

则问题变为 $U|_{\rho=a} = U_0 = 0$ （可以为规定）✓

$u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$ 周期性 ✓

$\vec{E} = -\nabla U|_{\rho\to\infty} = \vec{E_0} = E_0\vec{e_x}$ （边界条件）

$U|_{\rho\to\infty} = -E_0 x = -E_0\rho\cos\varphi$ ✓



核心：通过坐标变换让边界条件只依赖单变量 便于分离变量，以解决复杂问题

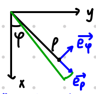
例：

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \vec{E}|_{x^2+y^2\to\infty} = E_0\vec{e_x} \\ U|_{x^2+y^2=a^2} = U_0 = 0 \\ u(x,y) \text{ 与 } z \text{ 无关} \end{cases}$$

（边界难以分离变量）

解： $u(x,y) \longrightarrow u(\rho,\varphi)$

则有 $x = \rho\cos\varphi$. $y = \rho\sin\varphi$.



$\vec{e_\varphi}\dfrac{u(\rho,\varphi+d\varphi)-u(\rho,\varphi)}{\rho\,d\varphi} = \vec{e_\varphi}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$

不要漏掉 $\frac{1}{\rho}$

$\Delta U = \nabla\cdot\nabla U$

$\nabla = \vec{e_\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e_\varphi}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ 梯度算子是单位长度变化率

实际为 $\vec{e_\rho}(\varphi)$. $\vec{e_\varphi}(\varphi)$

有 $\Delta = (\vec{e_\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e_\varphi}\cdot\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi})(\vec{e_\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e_\varphi}\cdot\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi})$ ① ②

$= \underbrace{\vec{e_\varphi}\cdot\dfrac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}_{①} + \underbrace{\vec{e_\varphi}\cdot\dfrac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi}}_{②} + 0 + \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 0 \qquad (a)$

$\dfrac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to0}\dfrac{\vec{e_\rho}(\rho,\varphi+\Delta\varphi)-\vec{e_\rho}(\rho,\varphi)}{\Delta\varphi} = \lim\limits_{\Delta\varphi\to0}\dfrac{\Delta\varphi\,\vec{e_\varphi}}{\Delta\varphi} = \vec{e_\varphi}$ $\boxed{\dfrac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi} = \vec{e_\varphi}}$ 同理也可画图分析得 $\boxed{\dfrac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\rho} = -\vec{e_\rho}}$

极坐标下的结论公式

两项代入(a)式得： $\Delta = \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}$ 最终有 $\boxed{\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}$

$\therefore \boxed{\Delta U = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0}$ 可以分离变量

接下来需要简化边界：

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \vec{E}|_{\rho\to\infty} = -\nabla u|_{\rho\to\infty} = E_0\vec{e_x} \\ U|_{\rho=a} = 0 \\ u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\rho\to\infty} = -E_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases}$$

令 $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$

$\Delta U = 0$ 方程变为 $R''(\rho)\Phi(\varphi) + \dfrac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \dfrac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$

先求齐次方程求本征函数

$\dfrac{\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\dfrac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$ 对任意 $\rho.\varphi$ 都成立. 只能与之无关 也就是为常数

(i) $\therefore \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ （ $\lambda \ge 0$ 才可能满足周期性）

由于 $u(\rho,\varphi)$ 周期性， λ 只能为→整数平方 $\lambda = m^2$（m 为整数） $\Phi(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi$ 周期 $2\pi/|m|$.

即得到本征值与本征函数

(ii) $\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - m^2R(\rho) = 0$ （$\lambda = m^2$）

1° $m=0$ 时 $\rho R'' + R' = 0$ 即 $\rho\dfrac{dR'}{d\rho} + R'(\rho) = 0 \Rightarrow \dfrac{dR'}{R'} = -\dfrac{1}{\rho}d\rho \Rightarrow \ln R'(\rho) = -\ln\rho + \ln C$ （c 为常数）

最终有 $R' = \dfrac{c}{\rho} \longrightarrow R'(\rho) = \dfrac{c}{\rho} \longrightarrow R(\rho) = C_0\ln\rho + D_0$ （C_0. D_0 为常数）

2° $m \neq 0$ 时

$R(\rho) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k\rho^k$ ，代入方程得 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k k(k-1)\rho^k + \sum a_k k\rho^k - m^2\sum\limits^{\infty} a_k\rho^k = 0$

$\therefore \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k[k^2 - m^2]\rho^k = 0$ 则 $k = m$ 或 $k = -m$ 时 a_k 任意, 其余全为0.

$\therefore$ a_m 与 a_{-m} 任意 ，其余 $a_k = 0$

$\therefore R(\rho) = C_m\rho^m + D_m\rho^{-m}$

那么 $u(\rho,\varphi) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} R_m(\rho) + \Phi_m(\varphi)$ 仍然为方程的解

$= D_0 + C_0\ln\rho + \sum\limits_{m=1}^{\infty}(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m})(\cos m\varphi + \tilde{B_m}\sin m\varphi)$ A_m 归于前一个括号内，$B_m \longrightarrow \tilde{B_m}$

(b)

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\rho\to\infty} = -E_0$ $\quad\therefore u\big|_{\rho\to\infty} = u_0 - E_0 x = u_0 - E_0\rho\cos\varphi$

同时分析上页（b）式，$u\big|_{\rho\to\infty} = D_0 + C_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \rho^m (\cos m\varphi + \tilde{B}_m \sin m\varphi)$

要让两式相等，项要对应.

此两式相等，得到 $C_m = 0\ (m\geq 2)$ 恒成立 $\quad\therefore u\big|_{\rho\to\infty} = D_0 + C_0\ln\rho + C_1\rho\cos\varphi$. （$\tilde{B}_m$ 也为0） $\boxed{\text{并且 } C_1 = -E_0}$

整理 $u(\rho,\varphi) = D_0 + C_0\ln\rho + C_1\rho\cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \rho^{-m}\cos m\varphi$.

同时还有条件 $u\big|_{\rho=a} = D_0 + C_0\ln a + C_1 a\cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} D_m a^{-m}\cos m\varphi = 0$ $\quad$ 应有 $D_m = 0\ (m\geq 2)$

并且 $C_1 a + D_1/a = 0$（对于所有 φ 恒成立） 且 $D_0 + C_0\ln a = 0$ $\quad\therefore \underline{D_0 = -C_0\ln a.\quad D_1 = -a^2 C_1}$

此时 $\underline{u(\rho,\varphi) = C_0\ln(\rho/a) - E_0\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\varphi}$. $\quad$ 只剩下 C_0，一个常数

下面分析解的含义

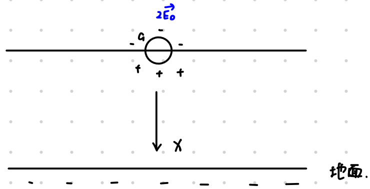
导线不带电 $\quad C_0 = 0$

若 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = u_0 = 0$（选定参考点） 与 ρ 无关

$\vec{E} = -\nabla u = -\vec{e_\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \vec{e_\varphi}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ $\quad$ 代入u表达式计算.

$= -\frac{C_0}{\rho}\vec{e_\rho} + E_0\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - E_0\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$

$\vec{E} = E_0\underbrace{(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi})}_{\vec{e_x}} + E_0\frac{a^2}{\rho^2}(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} + \sin\varphi\,\vec{e_\varphi})$



平行板间若有棒形突出

则尖端场强变为两倍 $\longrightarrow$ 击穿电压减为原来一半.

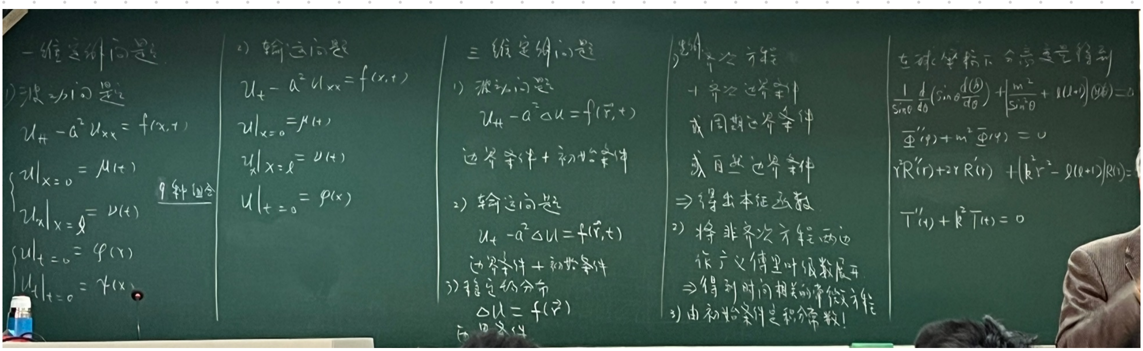
总结

直角坐标：$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

极坐标下：$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

若柱坐标：$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

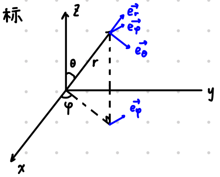
球坐标：$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$



第九章 二阶常微分方程的级数解法及本征值问题

§ 9.1 特殊函数的微分方程

球坐标



$(x, y, z) \longrightarrow (q_1, q_2, q_3)$

$dV = dx\,dy\,dz$
$= dr \cdot r d\theta \cdot r\sin\theta\, d\varphi$
$= h_1 dq_1 \cdot h_2 dq_2 \cdot h_3 dq_3$ （通式）

$\boxed{\text{度规}}$

在球坐标下 $h_1 = 1$. $h_2 = r$. $h_3 = r\sin\theta$

在柱坐标下 $(x, y, z) \to (\rho, \varphi, z)$ 对应的 $h_1 = 1$. $h_2 = \rho$. $h_3 = 1$

在这种模式下. 梯度算子 $\nabla = \vec{e_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e_2}\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{e_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}$

Laplace算子 $\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

（先对分量偏导. 乘上某系数再偏导. 最后乘系数）

$\boxed{\text{各个单位矢量对三个分量的偏导数}}$

$\vec{e_r}(\theta, \varphi)$. $\vec{e_\theta}(\theta, \varphi)$. $\vec{e_\varphi}(\varphi)$

因此 $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial r} = 0$ 与 r 均无关

$\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\vec{e_r}(\theta+\Delta\theta, \varphi) - \vec{e_r}(\theta, \varphi)}{\Delta\theta} = \vec{e_\theta}$

$\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta} = -\vec{e_r}$

$\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\theta} = 0$ 投影后与θ无关

发现 $\underline{\vec{e_\varphi} = \vec{e_r}\times\vec{e_\theta}}$ 因此 $\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\theta} = \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}\times\vec{e_\theta} + \vec{e_r}\times\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta} = \vec{e_\theta}\times\vec{e_\theta} + \vec{e_r}\times(-\vec{e_r}) = 0$

其余量待计算 $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi} = \sin\theta\cdot\vec{e_\varphi}$ $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi} = \cos\theta\cdot\vec{e_\varphi}$ $\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -(\vec{e_r}\sin\theta + \vec{e_\theta}\cos\theta)$

Laplace方程 $\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ ①

$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\underline{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)} = R(r)\underline{Y(\theta, \varphi)}$

代入上面①式: $\frac{Y(\theta,\varphi)}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R'(r)) + \frac{R(r)}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R(r)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0$ 对于方程. 移项后同除以 $Y(\theta,\varphi)$. 再同乘 r^2

整理得: $-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) = \frac{1}{Y(\theta,\varphi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y(\theta,\varphi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\lambda = -l(l+1)$

得到两个方程: $\begin{cases} r^2R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0 \\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\sin^2\theta\cdot Y = 0 \end{cases}$

在球坐标下分析 Laplace 方程.
用分离变量的方法求出相应的特殊方程.

把Y的两部分拆开. 移项整理有:

$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu.$

$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0$ 和 $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$ 具有周期性. 要求 $\underline{\mu = m^2\ (m\text{为整数})}$

另一方程变为 $\underline{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0}$ 连带勒让德方程（Legandre）

$u_{tt} - a^2\Delta u = 0$ 球坐标下的波动方程

$u(t, \vec{r}) = T(t)\tilde{u}(\vec{r})$

代入上面方程有 $T''(t)\tilde{u}(\vec{r}) = a^2T(t)\Delta\tilde{u}(\vec{r})$

整理有 $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta\tilde{u}(\vec{r})}{\tilde{u}(\vec{r})} = -k^2$

得到两个方程: $\begin{cases} T''(t) + a^2k^2T(t) = 0 \\ \Delta\tilde{u}(\vec{r}) + k^2\tilde{u}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$

对比上面过程. 方程在 Laplace 方程基础上增加一项 （左边是 Laplace）

最终表示为 $\underline{r^2R''(r) + 2rR'(r) + [k^2r^2 - l(l+1)]R(r) = 0}$ 球贝塞尔方程（Bessel）

球坐标

矢量方程

电磁波 $\vec{E}_{tt} - c^2 \Delta \vec{E} = 0$

$\vec{E} = E_r \vec{e_r} + E_\theta \vec{e_\theta} + E_\varphi \vec{e_\varphi}$

$\nabla = \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e_\theta}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e_\varphi}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

三维定解问题

在球坐标下分离变量得到

三个变量只需要两组本征值,本征函数
留下一个非齐次边界

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) + [k^2r^2 - l(l+1)]R(r) = 0$$

$$T''(t) + k^2 T(t) = \tilde{f}(k,t)$$

柱坐标

柱坐标下方程

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\rho,\varphi,z)}{\partial z^2} = -k^2 u$$

令 $u(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 　分离变量,目标是得到三个独立方程 ①~③.

代入得: $\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi(\varphi)}\Phi''(\varphi) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - k^2 = -\mu$

得到两个方程:

$$\begin{cases} Z''(z) + (k^2-\mu)Z(z) = 0 & ① \\ \frac{\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} \mu\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda \end{cases}$$

仍然有 $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ 和 $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$ 具有周期性. 要求 $\lambda = m^2$ (m为整数) 　即 $\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$ ②

对于 ρ: $\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\mu\rho^2 - m^2)R(\rho) = 0$ ③

$\mu > 0$ 时, ③ 称为 贝塞尔 Bessel 方程

$\mu < 0$ 时 　虚宗量 Bessel 方程

令 $x = \cos\theta$ 则 $dx = -\sin\theta d\theta$ 原来的连带勒让德方程变为:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta(x)}{dx}\right] + \left[\frac{-m^2}{1-x^2} + l(l+1)\right]\Theta(x) = 0}$$

即 $(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x) = 0$ 　$(-1 \le x \le 1)$

$m=0$ 时称为勒让德方程 即 $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + l(l+1)y(x) = 0$

§9.2 级数法求解常微分方程

原来的球 Bessel 方程、勒让德方程均形如

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

希望展开成 $y(x)=\sum C_k(x-x_0)^k$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}$ $p(x),q(x)$ 均有限，则 x_0 是常点
只要有一个发散，则 x_0 是奇点

① 常点邻域的级数解法

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,\quad x_0\text{是常点}$$

常点展开是 Taylor 级数

例 1： $y''(x)+w^2y(x)=0$

$p(x)=0$，$q(x)=w^2$ 均为常数

不妨在 $x=0$ 邻域上作级数展开.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

x 最低为零次
故 k 从 2 开始取
或 k 改换为 $k+2$

代入原方程有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kk(k-1)x^{k-2}+w^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$

k 进行变换则有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[a_{k+2}(k+2)(k+1)+w^2a_k\right]x^k=0$

显然应有 $\boxed{a_{k+2}=-\frac{w^2}{(k+2)(k+1)}a_k}$ ← 所有系数均为 0

求出递推是关键

已知 a_0,a_1 作为常数

所有的 a_k 可以用 a_0,a_1 表示

$a_2=-\frac{w^2}{2!}a_0$，$a_4=\frac{w^4}{4!}a_0$ … 可以递推得到

$a_3=-\frac{w^2}{3!}a_1$，$a_5=\frac{w^4}{5!}a_1$ …

$$\boxed{\begin{aligned}a_{2k}&=(-1)^k\frac{w^{2k}}{(2k)!}a_0\\ a_{2k+1}&=(-1)^k\frac{w^{2k}}{(2k+1)!}a_1\end{aligned}}$$

可得 $y(x)=a_0\underline{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}x^{2k}}+a_1\underline{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_1}x^{2k+1}}$

需要收敛条件

$=a_0y_0+a_1y_1$

$y_0=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(wx)^{2k}=\cos wx$ → 本题恰好用 sin、cos 表达，但也可能直接用级数表达

$y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{w^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\frac{1}{w}\sin wx$ 不妨令 $\tilde{a}_1=a_1/w$

最后 $y(x)=a_0\cos wx+\tilde{a}_1\sin wx$ 收敛半径 $R=\infty$

例 2： $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+l(l+1)y(x)=0$ （勒让德方程）

易得 $p(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$，$q(x)=\frac{l(l+1)}{1-x^2}$ $(-1\le x\le 1)$

$x=1$ 和 $x=-1$ 为奇点，$x=0$ 是常点 展开时可以找常点作 taylor 级数展开

$y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 猜测收敛半径 $R=1$

原方程为 $(1-x^2)\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kk(k-1)x^{k-2}-2x\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kkx^{k-1}+l(l+1)\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$

不存在 x 的负幂次，故第一项 k 从 2 开始

即 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_kk(k-1)x^{k-2}-\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kk(k-1)x^k-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kkx^k+l(l+1)\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$

不妨先考察 x^0 项系数：$2a_2+l(l+1)a_0=0$ $\therefore a_2=-\frac{l(l+1)}{2}a_0$

x^1 项： $6a_3-2a_1+l(l+1)a_1=0$ $\therefore a_3=\frac{2-l(l+1)}{3\times2}a_1$

寻找规律 → x^k 项 $(k\ge3)$ 系数 $(k+2)(k+1)a_{k+2}-a_kk(k-1)-2a_kk+a_kl(l+1)=0$

$$a_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k\quad\text{递推公式}$$

$\boxed{y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)}$ 由 a_0,a_1 可表示余下项，提取 a_0,a_1，余下系数合并为 $y_0(x),y_1(x)$，参考例 1.

收敛半径 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}\right|=1$ 最终得 $|x|<1$ 收敛，$|x|>1$ 发散

如果要求收敛，应该只有有限项（到某一项断开停下）⟶ l 为整数，（$k-l$ 会有一项 $=0$）

比如 l 为整数 则 a_{l+2} 开始为 0，后面 $a_{l+4},a_{l+6}\cdots$ 均为 0，$y_0\longrightarrow$ 多项式（有限项）

l 为奇数 ——— $y_1\longrightarrow$ 多项式

} 只要 l 为整数
至少可以得到有限解
多项式称为勒让德多项式 $(P_l(x))$

$\lambda=l(l+1)$ 为本征值

$a_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}a_0$，$a_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4\times3}a_2=\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}a_0$ 不断分子向两边扩张

§ 9.3 正则奇点邻域上的级数解法

$\boxed{y''(x) + P(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0 \quad ①}$

若 $P(x)$、$q(x)$ 有至少一个发散，则 x 为奇点

都只有有限负幂次项

又若 $P(x) = \sum\limits_{k=-1} P_k (x-x_0)^k$，$q(x) = \sum\limits_{k=-2} q_k (x-x_0)^k$，则称 x_0 是方程的 正则奇点（正则奇点可解）

$P(x)$ 最低负一次幂，$q(x)$ 最低负二次幂.

完整过程

设 $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{s+k}$ 并且最低为 s 次幂 ⟶ 要求 $a_0 \neq 0$，否则最低不是 s 次幂

↓假设

s 可正可负、也可为非整数

此时：$y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(x-x_0)^{s+k-1}$

$y''(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(s+k-1)(x-x_0)^{s+k-2}$

代入方程 ①，先考察 $(x-x_0)^{s-2}$ 项系数：$k=0$ 时有 $a_0 s(s-1) + a_0 s P_{-1} + a_0 q_{-2} = 0$

由于 $a_0 \neq 0$ ∴ 只能 $s^2 - s + sP_{-1} + q_{-2} = 0$　解得 $s: \dfrac{1-P_{-1} \pm \sqrt{(P_{-1}-1)^2 - 4q_{-2}}}{2}$ 对应两个解 s_1、s_2

并且 $s_1 + s_2 = 1 - P_{-1}$，$s_1 - s_2 = \sqrt{(1-P_{-1})^2 - 4q_{-2}}$

再考察 $(x-x_0)^{s-1}$ 项系数：$a_1(s+1)s + a_1(s+1)P_{-1} + a_0 q_{-1} + a_1 q_{-2} = 0$

$y_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{s_1+k}$.　$y_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^{s_2+k}$　最后得到的 y 有两个解，并且 $s_1 - s_2$ 为整数的情况还要进行补充（再找一个解）

在这种形式下 $\begin{cases} y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0 \\ y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$　上乘 $y_2(x)$，下乘 $y_1(x)$　再上下相减（下减上）

即 $y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$　令 $\Delta(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$　则有 $\Delta'(x) = \underbrace{y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1'}_{\text{抵消}} - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$

整理 $\dfrac{d\Delta(x)}{dx} + P(x)\Delta(x) = 0$　即 $\dfrac{d\Delta(x)}{\Delta x} = -P(x)dx$（移项）　同时积分有 $\ln\Delta(x) = \ln\Delta_0 - \int P(x)dx$　∴ $\Delta(x) = \Delta_0 e^{-\int P(x)dx}$.（$\Delta_0$ 为常数）

又有 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right) = \dfrac{y_2'}{y_1} - \dfrac{y_1' y_2}{y_1^2} = \dfrac{\Delta(x)}{y_1^2}$　∴ $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \dfrac{\Delta(x)}{y_1^2}dx = \int \dfrac{\Delta_0}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$（积分的积分）　∴ $\boxed{y_2(x) = \Delta_0 y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx.}$　$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的关系　②

由于 $P(x)$ 最低是 $(x-x_0)^{-1}$ 项，可以单独提出.

$P(x) = (x-x_0)^{-1} T(x)$　其中 $T(x)$ 为 Taylor 级数展开

$= P_{-1}(x-x_0)^{-1} \cdot \dfrac{T(x)}{P_{-1}}$（将系数 P_{-1} 也提出）⟶ ∴ $\int P(x)dx = P_{-1}\ln(x-x_0) + T_1(x)$

∴ $e^{-\int P(x)dx} = e^{-P_{-1}\ln(x-x_0)} \cdot e^{T_1(x)} = (x-x_0)^{-P_{-1}} \cdot T_2(x)$（$e^{T_1(x)} = T_2(x)$ 指数后仍为泰勒级数）

同理：$y_1(x) = (x-x_0)^{s_1} \cdot T_3(x)$ 最低 s_1 次幂.　$y_1^2(x) = (x-x_0)^{2s_1} \cdot T_4(x)$

全部代入 ② 式求解 $y_2(x)$：

$y_2(x) = \Delta_0 y_1 \int \dfrac{(x-x_0)^{-P_{-1}} T_2(x)}{(x-x_0)^{2s_1} T_4(x)} dx$　根据右上方蓝色关系式　前有 $s_1 + s_2 = 1 - P_{-1}$，故 $s_2 = 1 - P_{-1} - s_1$

$= \Delta_0 y_1 \int (x-x_0)^{-P_{-1}-2s_1} T_5(x)\, dx$　泰勒级数 / 泰勒级数 仍为 $T_n(x)$　$\boxed{P_{-1} + s_1 = 1 - s_2}$

关键要看被积式是否含有 $(x-x_0)^{-1}$ 项

由于 $-P_{-1} - 2s_1 = s_2 - 1 - s_1$（右侧）　规定了 $s_1 > s_2$　∴ $-P_{-1} - 2s_1 < -1$

可得 $y_2(x) = \Delta_0 y_1 (x-x_0)^{s_2-s_1} T_6(x) = (x-x_0)^{s_2} T_7(x)$（如果 $s_1 - s_2$ 不是整数，积分时次数 +1 即可）

↳ 最低 s_2 次幂

$y_2 = \Delta_0 y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{s_2} T$

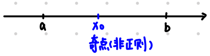
综上，可以得到通解　$y_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{s_1+k}$

$y_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^{s_2+k} + A y_1 \ln(x-x_0)$　在 $s_2 - s_1$ 为整数时加上此项，非整数时 $A = 0$

Q： 对于非正则奇点能否适用？

假设 $P(x) = \sum\limits_{k=-2}^{\infty} P_k (x-x_0)^k$.　$q(x) = \sum\limits_{k=-3}^{\infty} q_k (x-x_0)^k$　代入方程分析系数得 $sP_{-2}a_0 + q_{-3}a_0 = 0$　∴ $s = -q_{-3}/P_{-2}$　只有一个解

讨论 y 是 x 的函数.　$x \in [a,b]$　方程仍为 $y''(x) + P(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

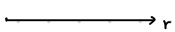


若中间有孤立奇点（非正则）

找每一段中点（常点）作 Taylor 级数展开.

若是正则奇点也可直接解

Q： 柱坐标内 R：$0 \to \infty$



例 1：在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $x^2y''(x)+xy'(x)-m^2y(x)=0$ （m为常数）

$p(x)=\frac{1}{x}$，$q(x)=-\frac{m^2}{x^2}$ ∴ $x_0=0$ 为方程的正则奇点

不妨设 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{s+k}$

由前有 $s_1=\frac{1-P_{-1}+\sqrt{(P_{-1}-1)^2-4q_{-2}}}{2}$ 并且 $P_{-1}=1$，$q_{-2}=-m^2$ ∴ $\boxed{s_1=m,\ s_2=-m}$

∴ $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{m+k}$

代入原方程得 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)x^{m+k}-m^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{m+k}=0$

合并得 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k[(m+k)^2-m^2]x^{m+k}=0$

(i) 对于 $k=0$，a_0 为任意值（$a_0\neq0$ 可满足）

(ii) 对于 $k\neq0$ 必须 $a_k=0$

综上 $y_1(x)=a_0x^m$

同时也有 $b_k[(-m+k)^2-m^2]=0$ ∴ $b_0\neq0$（任意） b_{2m} 也任意，其余 $b_k=0$，故 $y_2(x)=b_0x^{-m}+b_{2m}x^m$ 与 y_1 类似，可省略（要求 m 为整数）

目标是求出两个独立的解即可

（法二：或者令 $y_2(x)=Ax^m\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{-m+k}$ 代入方程求解 $y_2(x)$）

例 2：在 $x_0=0$ 邻域求解 m阶贝塞尔方程：$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-m^2)y(x)=0$

$p(x)=\frac{1}{x}$，$q(x)=1-\frac{m^2}{x^2}$，$x_0=0$ 为方程正则奇点

因此仍有 $s_1=m$，$s_2=-m$

令 $y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k}$ 代入原方程，先看 x^{m+k} 项系数：$\boxed{a_k(m+k)(m+k-1)+a_k(m+k)-m^2a_k+a_{k-2}=0}$ （$k\geq2$）

x^m 项系数：$a_0[m(m-1)+m-m^2]=0$ 显然恒成立（$a_0\neq0$）

x^{m+1} 项系数：$a_1(m+1)\cdot m+a_1(m+1)-m^2a_1=0$ ⇒ $a_1[(m+1)^2-m^2]=0$ ⇒ $a_1=0$

从 x^{m+2} 即 $k=2$ 开始存在递推，并且 $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$

递推关系：$a_k(m^2+2km+k^2-m^2)+a_{k-2}=0$ ∴ $\boxed{a_k=-\frac{1}{k(k+2m)}a_{k-2}}$ ∴ $a_2=-\frac{1}{2^2(1+m)}a_0$，$a_4=-\frac{1}{4(4+2m)}a_2=\frac{1}{2^4\times2\times(2+m)(1+m)}a_0$

从而有 $\boxed{a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)(1+m)(2+m)\cdots(k+m)}a_0}$ 以及 $a_{2k+1}=0$

$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$ 利用性质 ∴ $a_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(m+1)}{2^{2k}(k!)(1+m)(2+m)\cdots(k+m)\Gamma(m+1)}a_0=\frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot k!\cdot\Gamma(k+m+1)}\tilde{a}_0$

最终解为：$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{m+2k}$

$=\tilde{a}_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot2^m}{k!\,\Gamma(k+m+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$

$=\tilde{\tilde{a}}_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$

$=\tilde{\tilde{a}}_0J_m(x)$

我们定义：$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$ 为 Bessel 函数，记为 $J_m(x)$

$y_2(x)=b_0J_{-m}(x)=b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$ （m为非整数）

若 m为整数：

$y_2(x)=Ay_1(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{-m+k}=N_m(x)$ 得到的解极为复杂

综合有 $y(x)=C_1J_m(x)+C_2J_{-m}(x)$

我们也可以定义 Neumann 函数：

m为非整数，$N_m(x)=\frac{J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x)}{\sin m\pi}$

则有 $y(x)=D_1J_m(x)+D_2N_m(x)$

（令 $m>0$，若 $x\to0$，可得 $J_m(x)\to1$

$J_{-m}(x)\to\infty$

$N_m(x)\to\infty$

如果要得到有限解，则 $J_{-m}(x)$ 或 $N_m(x)$ 系数为 0。）

贝塞尔方程求解

$\boxed{\Gamma\text{函数}}$

$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ （定义式）

或者 $\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\right]$

$=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right]$

其中 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 为欧拉常数

可得一些性质 $\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$

代入 $x=0$ 得 $\Gamma(1)=1$ 则 $\Gamma(0)\to\infty$

发现 $x\leq0$ 且 x为整数时，$\Gamma(x)$ 均发散

因此需要推广 y_2 至 $y_2(x)=AJ_m(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{-m+k}$.

（m为整数的 $N_m(x)$）

接下来求解 y_2 中的系数

性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$\Gamma(n)=(n-1)!$ （n为整数）

$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

不妨对 y_2 求导

$$y_2' = AJ_m' \ln x + AJ_m \cdot \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(-m+k)x^{-m+k-1}$$

$$y_2'' = AJ_m'' \ln x + 2AJ_m' \frac{1}{x} - \frac{A}{x^2} J_m + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(-m+k)(-m+k-1)x^{-m+k-2}.$$

全部代入原有的 Bessel 方程 $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2-m^2)y(x) = 0$

整理得: ______________

最终解得

$$y_2(x) = N_m(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + C\right)J_m(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{n!\,(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!\,(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

m为非整数时 $N_m(x) = \dfrac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}$ 取 $m \to$ 整数的极限再用洛必达. 得到二者等价.

贝塞尔方程的解

最终 $y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)$ 为贝塞尔方程的解

当 $x \to 0$ 时 $N_m(x) \to \infty$, 若包含Z轴时为有限解. 则 $C_2 = 0$.

(期末考试原题)

$$x^3 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

$x=0$ 为非正则奇点 但仍然尝试使用级数解法

令 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k}$

则有 $y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k) x^{s+k-1}$

$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(s+k-1) x^{s+k-2}$.

代入原方程: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(s+k-1) x^{s+k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k) x^{s+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} = 0$

讨论 x^s 项系数有 $a_0 s + a_0 = 0$ 由于 $a_0 \neq 0$. 则 $\boxed{s=-1}$ 假设 x^s 为最低次幂. 故 $a_0 \neq 0$

讨论 x^{s+1} 项系数: $a_0 \ (-1)(-2) + a_1 \cdot 0 + a_1 = 0$ 得到 $a_1 = -2a_0$

讨论 x^m 项系数: $a_m(m-1)(m-2) + a_{m+1}\cdot m + a_{m+1} = 0$ 得到递推关系 $\boxed{a_{m+1} = \dfrac{-(m-1)(m-2)}{m+1} a_m}$

发现 $a_2 = 0$. 则此后所有 a_m 均为0.

$\therefore y(x) = \dfrac{a_0}{x} - 2a_0 = -a_0\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$ 是一个有限解.

§ 9.4 斯图姆－刘维尔本征值问题

$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$ $(a \le x \le b)$

即 $k(x)y''(x) + k'(x)y'(x) - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$

加上第一、二、三类齐次边界条件
或者 周期边界 / 自然边界条件
(边界有限)
⟶ 构成 Sturm-Liouville 本征值问题

对照 $y''(x) + p(x)y'(x) + \tilde{q}(x)y(x) = 0$ 的形式

可得 $p(x) = \frac{k'(x)}{k(x)}$, $\tilde{q}(x) = \frac{\lambda\rho(x) - q(x)}{k(x)}$

例(I)
$a=0$, $b=L$
$k(x) = C_1$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = C_2$
则有 $\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(0) = 0,\ y(L) = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$ $\therefore y(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x$

例(II)
$a=-1$, $b=1$
$k(x) = 1-x^2$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$
则有 $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + \lambda y(x) = 0$
$(1-x^2)y'' - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$ Legendre 方程
$\Rightarrow \lambda = l(l+1)$ $\therefore y(x) = P_l(x)$

$p(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, $q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2}$
$x = \cos\theta \longrightarrow -1 \le x \le 1$ 为自然边界条件.
$x_0 = \pm 1$ 是方程的正则奇点

自然边界条件:
边界处本身是方程的奇点(发散), 但在λ的作用下
加入了对解的限制, 最后得到有限

即 $p(x)|_{边界处}$ 或 $\tilde{q}(x)|_{边界处}$ 发散
则 $k(x)|_{边界处} = 0$
并且阶数不能太高, 否则是非正则奇点

S-L 本征值问题的共同性质

当 $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 均 ≥ 0 时 共同性质的前提条件

(1) 若 $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$ 连续或最多以 $x=a, b$ 为一阶极点 (边界处)
则存在无限多个本征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ 对应无限多个本征函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)\cdots$

(2) 所有本征值 $\lambda_n \ge 0$ (原方程用 y_n 遍乘各项, 从a到b积分再分析)

(3) 对应于不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数 y_m 和 y_n 在 $[a,b]$ 带权重 $\rho(x)$ 正交
即 $\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx = 0$ $(\lambda_m \ne \lambda_n,\ m \ne n)$

对于归一化 $\tilde{y}_m(x)$ 和 $\tilde{y}_n(x)$
$\int_a^b \tilde{y}_n(x)\tilde{y}_m(x)\rho(x)dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \ne m \\ 1, & n = m \end{cases}$
(Kronecker 符号)

证明

$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_n(x)}{dx}] - q(x)y_n(x) + \lambda_n\rho(x)y_n(x) = 0$ ②

$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy_m(x)}{dx}] - q(x)y_m(x) + \lambda_m\rho(x)y_m(x) = 0$ ③

② $\times y_m$ − ③ $\times y_n$ 得到 $y_n\frac{d}{dx}[ky_m'(x)] - y_m\frac{d}{dx}[ky_n'(x)] + (\lambda_m - \lambda_n)\rho(x)y_m(x)y_n(x) = 0$

再逐项从a到b积分:

$0 = \int_a^b [y_n\frac{d}{dx}(ky_m') - y_m\frac{d}{dx}(ky_n')]dx + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho y_m y_n dx$

$= \underline{k(x)(y_m'(x)y_n(x) - y_n'(x)y_m(x))}\Big|_a^b + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx$

端点
第一类边界条件 $y_n(x) = y_m(x) = 0$
第二类边界条件 $y_m'(x) = y_n'(x) = 0$
第三类边界条件 $Hy_m'(x) + y_m(x) = 0 \longrightarrow y_m'(x) = -\frac{1}{H}y_m(x)$
自然边界条件 $k(x)|_{x=b} = 0$

四种情况的蓝色部分
全部为0.

最后由于 $\lambda_m \ne \lambda_n$ $\therefore$ 只能有 $\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0$. $\rho(x)$ "带权重"

(4) 本征函数族 $\{y_n(x)\}$ 是完备的 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ $(a \le x \le b)$ 右边级数称为广义傅里叶级数, f_n 称为广义傅里叶系数

下面分析展开系数 f_n. 由于级数绝对且一致收敛, 可以逐项积分

等式乘上 $\rho(x)y_m(x)$ 从a到b积分 $\int_a^b f(x)y_m(x)\rho(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\int_a^b y_n(x)y_m(x)\rho(x)dx$

$= f_m\underbrace{\int_a^b y_m^2(x)\rho(x)dx}_{N_m^2\ (模)\ "带权重"}$

m≠n 时 根据性质(3) 积分为0
m=n 时 令其为 N_m^2

最终得 $f_m = \frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(x)y_m(x)\rho(x)dx$

$\boxed{\tilde{y}_n(x) = \frac{1}{N_n}y_n(x) \text{ 称为 归一化的单位基矢量.}}$ $\int_a^b (\tilde{y}_n(x))^2\rho(x)dx = 1.$

(plus) 复数的本征函数族.

复共轭. 将 i 改为 $-i$

为保证模为实数. 定义改为: $N_m^2 = \int_a^b y_m(x)\underline{[y_m(x)]^*}\rho(x)\,dx$

正交关系改为: $\int_a^b y_m(x)[y_n(x)]^*\rho(x)\,dx = 0 \quad (n \neq m)$

因而有 $\int_a^b y_m(x)[y_n(x)]^*\rho(x)\,dx = N_m^2\delta_{m,n}$

$f_m = \frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(x)[y_m(x)]^*\rho(x)\,dx$ 广义傅里叶系数

数理方法I（7-9章）回顾

（一）方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(\vec{r},t) \\ u_t - D\Delta u = f(\vec{r},t) \\ \Delta u = f(\vec{r}) \end{cases}$$

（二）边界条件

① $u|_\Sigma = \varphi(\vec{r},t)$

② $\nabla u|_\Sigma = \psi(\vec{r},t)$

③ $u + k\nabla u|_\Sigma = \tilde{\varphi}(\vec{r},t)$

④ 自然边界条件

⑤ 周期边界条件

⑥ 其他边界条件

（三）初始条件

（四）定解问题

存在性、唯一性、稳定性

解决方法

① 边界齐次化

通过变换使边界齐次化

② 假设方程齐次，求解齐次方程本征值、本征解

③ 方程两边用本征解作傅里叶展开

④ 代入初始条件得到待定系数

⑤ 讨论结果的合理性和物理含义

24-25 秋冬数理方法 I（求科强基）期末

回忆卷

一、(30 points) **复变函数**

1. 试取七个单位复数，使它们首尾相接可组成一正七边形，分别记为 $z_k(1 \leqslant k \leqslant 7)$，并求 $\sum_{k=1}^{6} z_k$
2. 求出复变函数 $f(z) = \dfrac{\ln(1+z^2)}{1+z^2}$ 的所有支点，并画出割线。然后求解积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. 利用 $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx\,\mathrm{d}k$，求解积分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
   (提示：$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{x}\,\mathrm{d}x$，$F(\omega)$ 可导，$I = F(1)$)

二、(15 points)　细杆传热问题：初始条件为：$u(x,0) = \dfrac{u_0 x}{L}$，$x=0$ 端温度保持不变，$x=L$ 端绝热，试求细杆上的温度分布 $u(x,t)$

三、(20 points)　一根杆，长度、质量密度、横截面积、杨氏模量分别为 l, ρ, S, E. 杆的一端固定，另一端与一根轻弹簧相连，弹簧一端固定在墙上，初始时弹簧自由伸长。用大小为 F_0 的力拉伸弹簧，突然在某时刻撤掉这个力，引起杆的纵振动

(1) 写出定解条件

(2) 证明不同本征函数之间正交

(3) 求解定解问题

四、(20 points)　边长为 $2a$ 的金属正方体中心有一个带电量为 q 的点电荷，求解正方体内的电势分布（提示：可利用 $\delta(x)$ 的 Fourier 展开，例如 $\delta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\frac{2n+1}{2a}\pi x$）

五、(15 points)　对于厄密方程：$y''-2xy'+\lambda y=0$

(1) 将其化成 S-L 标准形式

(2) 使用幂级数法求解

(3) 讨论其解退化成多项式的可能性

六、(20 points) **附加题**　对于圆环坐标系 (r,θ,ψ)，我们已知该坐标系下梯度算子的形式是：

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_\psi}{R+r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}$$

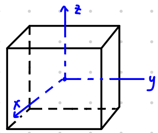
求解该坐标系下 Laplace 算子 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 的具体形式，并考虑在圆环坐标系下对 Laplace 方程分离变量。（原卷上是有圆环坐标系的示意图的，我懒得画了，这些信息应该足够做题了）

期末考试讲解

四、(20 points) 边长为 $2a$ 的金属正方体中心有一个带电量为 q 的点电荷，求解正方体内的电势分布（提示：可利用 $\delta(x)$ 的 Fourier 展开，例如 $\delta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x$）

由题意可得正方体表面为等势面. 可导出边界条件:

$$u|_{x=a}=u|_{x=-a}=0$$
$$u|_{y=a}=u|_{y=-a}=0$$
$$u|_{z=a}=u|_{z=-a}=0$$



已知 $\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\\&\vec{E}=-\nabla u\end{aligned}}$

$$\therefore\ \Delta u=-\rho/\varepsilon_0=-\frac{q}{\varepsilon_0}\cdot\delta(x)\delta(y)\delta(z)=f(\vec{r})\quad ①$$

ρ 表示电荷量. q 表示电荷密度

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m,k=0}^{\infty}A_{n,m,k}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cdot\cos\frac{(2m+1)\pi}{2a}y\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{2a}z\quad ②$$

目的就是解出系数 $A_{n,m,k}$

$$\delta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x$$

$\delta(x)$ 的 Fourier 展开

利用基的正交性，等式两边同时积分

$$\int_{-a}^{a}\delta(x)\cos\frac{(2m+1)\pi}{2a}x\,dx=\int_{-a}^{a}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cdot\cos\frac{(2m+1)\pi}{2a}x\,dx$$

即得: $1=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\int_{-a}^{a}\underline{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cdot\cos\frac{(2m+1)\pi}{2a}x}\,dx$

正交性. 只有 $n=m$ 时 积分不为0

展开得 $1=b_n\cdot a\Rightarrow b_n=\frac{1}{a}$

故有 $\delta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x$ 同理也得 $\delta(y)$、$\delta(z)$.

代入①式得:

$$\therefore\ \Delta u=-\frac{q}{\varepsilon_0a^3}\sum_{n,m,k}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cdot\cos\frac{(2m+1)\pi}{2a}y\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{2a}z\quad ③$$

联立②③式. 可得:(对②求两次导)

$$-\sum_{n,m,k=0}^{\infty}A_{n,m,k}\left\{\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right]^2+\left[\frac{(2m+1)\pi}{2a}\right]^2+\left[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right]^2\right\}\cos(\quad)\cos(\quad)\cos(\quad)=-\frac{q}{\varepsilon_0a^3}\sum_{n,m,k=0}^{\infty}\cos(\quad)\cos(\quad)\cos(\quad)$$

若要等式成立, 应有:

$$\boxed{A_{n,m,k}=\frac{q}{\varepsilon_0a^3}\Big/\left\{\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right]^2+\left[\frac{(2m+1)\pi}{2a}\right]^2+\left[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right]^2\right\}}$$

$$\boxed{A_{n,m,k}=\frac{4q}{\pi^2\varepsilon_0a}\Big/\left[(2n+1)^2+(2m+1)^2+(2k+1)^2\right]}$$

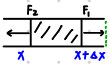
三、(20 points)　一根杆，长度、质量密度、横截面积、杨氏模量分别为 l, ρ, S, E. 杆的一端固定，另一端与一根轻弹簧相连，弹簧一端固定在墙上，初始时弹簧自由伸长。用大小为 F_0 的力拉伸弹簧，突然在某时刻撤掉这个力，引起杆的纵振动

撤力后视为自由端

(1) 写出定解条件

(2) 证明不同本征函数之间正交

(3) 求解定解问题



胡克定律 $\boxed{\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta L}{L} = Y u_x}$

$F = SYu_x$ （Y为杨氏模量）

$F_1 - F_2 = \Delta x S\rho u_{tt}$　代入F表达式得：

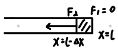
$SYu_x\big|_{x+\Delta x} - SYu_x\big|_{x} = \Delta x S\rho u_{tt}$　(i)

移项整理得 $\boxed{u_{tt} - \frac{Y}{\rho}u_{xx} = 0}$

接下来分析边界条件：

① 右侧不受力（自由）$F_1 = 0$　即 $0 - SYu_x\big|_{x=L-\Delta x} = \Delta x S\rho u_{tt}$

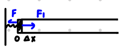
此处实际是将 (i) 的一般式特殊化，代入端点的情况
在处理时令 $\Delta x \to 0$ 得到边界条件



最后令 $\Delta x \to 0$　左右均 $\to 0$

即得 $\boxed{u_x\big|_{x=L} = 0}$ 右侧边界条件

② 左侧连接弹簧，需要考虑端点处形变产生的弹力



$$\begin{cases} F_1\big|_{x=\Delta x} - F\big|_{x=0} = \Delta x S\rho u_{tt} \\ F = -ku\big|_{x=0} \end{cases}$$

同样是代入具体情形下的两个力至 (i)
再令 $\Delta x \to 0$

$\therefore SYu_x\big|_{x=\Delta x} + ku\big|_{x=0} = \Delta x S\rho u_{tt}$

最后令 $\Delta x \to 0$ 得 $\boxed{\left(u_x + \frac{k}{SY}u\right)\Big|_{x=0} = 0}$ 左侧边界条件

综上，定解问题为：

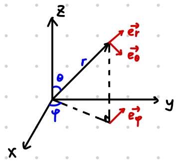
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ (u_x + Hu)\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=L} = 0 \\ u\big|_{t=0} = F_1 x \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$v(\vec{r}) = v(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ 分两次分离变量

$\Delta v + k^2 v = 0$ 亥姆霍兹方程

$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

(r,θ,φ) $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}$



由图得 $\vec{e_r}(\theta,\varphi)$, $\vec{e_\theta}(\theta,\varphi)$, $\vec{e_\varphi}(\varphi)$

各个偏导数为：

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta} = \vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla &= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e_\varphi}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \Delta &= \nabla\cdot\nabla = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \end{aligned}}$$

重要算子

第十章　球函数

对于特殊边界，选取适当坐标系
使得边界容易分离变量

§10.1 轴对称球函数

step1　$\Delta u = 0$　或　$\Delta u + k^2 u = 0$　无论是否齐次，都先视为齐次求本征函数

在球坐标 (r,θ,φ) 下分离变量　$\boxed{u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)}$

对于非齐次方程，只需要两个变量的本征值，本征函数。
剩下一个保留非齐次，两边同时展开。

方程为：$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0$

同乘 r^2 并整理：$\left[r^2R''(r) + 2rR'(r) + r^2k^2R(r)\right]Y(\theta,\varphi) + \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]R(r) = 0$　从而将 $Y(\theta,\varphi)$ 和 $R(r)$ 初步分离

同除以 $R(r)Y(\theta,\varphi)$　$-\frac{r^2R''(r) + 2rR'(r) + k^2r^2R(r)}{R(r)} = \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right)\Big/ Y(\theta,\varphi)$　$= -\lambda = -l(l+1)$．l 只能取整数

分离出变量，两边都等于常数

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''(r) + 2rR'(r) + \left[k^2r^2 - l(l+1)\right]R(r) = 0 & ① \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y(\theta,\varphi) = 0 & ② \end{cases}$$

St2.　考查②式　再次分离变量　$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

即：$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\Phi(\varphi) + \Phi''(\varphi)\Theta(\theta) + l(l+1)\sin^2\theta\,\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$

整理得：$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{l(l+1)\sin^2\theta}{\Theta(\theta)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu \equiv m^2$　可进一步证明（根据周期边界条件）

进一步得到：

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \longrightarrow \Phi(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi \\ \sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

⇒ 缔合勒让德方程

St3.　$\boxed{令\ \cos\theta = x \quad 0 \le \theta \le \pi. \quad -1 \le x \le 1 \quad -\sin\theta\, d\theta = dx}$

上式等价于　$-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta(\theta) = 0$　用 x 表示 θ　即　$(1-x^2)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left[l(l+1)(1-x^2) - m^2\right]\Theta(x) = 0$

同除以 $(1-x^2)$ 并展开：　$(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x) = 0$

St4.　对于轴对称球函数：$(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + l(l+1)\Theta(x) = 0.\quad -1 \le x \le 1$

（由于轴对称球函数　∴ $u(r,\theta)$ 与 φ 无关　又有 $\Phi(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi$
只能 $m=0$，才可能 u 与 φ 无关　∴ 可得左边式，勒让德方程）

考虑级数法求解．对照标准形式　$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$　　$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$．$q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2}$

故 $x=0$ 是常点，收敛半径猜想 $R=1$．（可证明）　不妨令 $\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$　　$\Theta''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k(k-1)k\,x^{k-2} \stackrel{等价}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$

代入上式得：$(k+1)(k+2)a_{k+2} - (k-l)(k+l+1)a_k = 0$　即 $a_{k+2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$　只需要 a_0, a_1 已知即得 $\boxed{\Theta(x) = a_0y_0(x) + a_1y_1(x)}$　由此返回可证收敛半径为1

若 l 为整数．则 $a_{l+2} = 0$　可能部分退化为多项式（$y_0(x)/y_1(x)$）只有当 $\lambda = l(l+1)$ 时，存在 $x=\pm1$ 处的有限解．且是最高次幂 x^l 的多项式

$\boxed{a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{(k-l)(k+l+1)}a_{k+2}}$　$\boxed{定义\ a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}}$ ☆　∴ $a_{l-2} = \frac{(k-1)k}{(k-l-2)(k+l-1)}a_l \stackrel{令k=l}{=} \frac{l(l-1)}{(-2)\cdot(2l-1)}\cdot\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$　归纳得　$\boxed{a_{l-2k} = \frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-2k+1)\cdot(-1)^k}{2k\cdot(2k-2)\cdots2\times(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2k+1)}\cdot\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}}$

进一步整理　$a_{l-2k} = (-1)^k\frac{(2l-2k)!}{k!\,2^l(l-k)!(l-2k)!}$　　故 $P_l(x) \equiv \sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$　↳ 定义为勒让德多项式（退化后的解）

即为勒让德多项式的定义．并且根据二项式定理，还可写为　$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l}$

$P_0(x) = 1$．$P_1(x) = x$．$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0\ , & k \ne l \\ N_l^2\ , & k = l \end{cases}$$

同理 $\int_0^{\pi}P_l(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\underbrace{\sin\theta}_{权重}d\theta = (N_l)^2\delta_{l,k}$．　"带权重正交"

接上：$P_l(x) = \frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$　再利用柯西公式：　$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dz$　由此得：$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i\cdot2^l}\oint\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$

回路可以多变，但只要包含 $z=x$ 点，
最后的结果保持不变

多种等价的表述方式
有多种路径但结果相同．
x 奇数时 $P_l(x)$ 奇函数．反之
x 偶数时 $P_l(x)$ 偶函数

例：拉普拉斯积分

上式可令 $z = x + \sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$　即　$z - x = \sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$

$P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x + \sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{2}(e^{i\psi}+e^{-i\psi})\right]^l d\psi$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^l d\psi$

$= P_l(\cos\theta)$

总结：$P_l(x)$ 有三种主要的表示方法．
但结果相同．可以根据题目选择．

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i\cdot2^l}\oint\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$$

$(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + l(l+1)\Theta(x) = 0$

本征值：$\lambda = l(l+1)$，l为整数 （根据 L-S 本征值问题 无穷多本征函数 应完备.正交）

本征函数：$P_l(x)$

$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot P_l(x)$ → 广义傅里叶级数展开　　利用 $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,dx = N_l^2\,\delta_{l,k}$ 的正交性

上式乘以 $P_k(x)$ 并积分：$\int_{-1}^{1} f(x)\,P_k(x)\,dx = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,dx = f_k N_k^2 \Longrightarrow f_k = \frac{1}{N_k^2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx$ 也即 $\boxed{f_l = \frac{1}{N_l^2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\,dx}$

（交换顺序需要收敛条件）

$N_l^2 = \frac{2}{2l+1}$

$\boxed{f_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\,dx}$

下面计算 N_l（勒让德多项式的模）

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}\cdot P_k(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}} P_k(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} P_k(x)\,d\left(\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right) \quad \text{分部积分}$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\left\{\left[P_k(x)\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\,\underbrace{dP_k(x)}_{=P_k'(x)\,dx}\right\} \quad ①$$

求 $l-1$ 阶导，仍含 x^2-1 故此项为 0.

看右侧项：$(-1)\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l P_k'(x)\,dx$

假设 $l \geq k$

$$= (-1)^2\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}}(x^2-1)^l P_k''(x)\,dx$$
$$= (-1)^k\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(x^2-1)^l P_k^{(k)}(x)\,dx$$
$$= (-1)^k\frac{1}{2^l l!}P_k^{(k)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(x^2-1)^l\,dx$$

规律.

$l>k$ 均为0

同理 $l>k$ 时求积会有 (x^2-1) 积分为 0.

但 $l=k$ 时上式 $= (-1)^l\frac{1}{2^l l!}P_l^{(l)}(x)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\,dx$

其中 $P_l^{(l)}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^{2l}(x^{2l})}{dx^{2l}} = \frac{(2l)!}{2^l l!}$

$\therefore$ 上式 $= (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\,dx$. $l=k$.

$$= \frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx \quad ②$$

单独取出分析：$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx = \int_0^{\pi}\sin^{2l}\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\sin^{2l+1}\theta\,d\theta = I_{2l+1}$

再利用分部积分：$I_{2l+1} = -\int_0^{\pi}\sin^{2l}\theta\,d\cos\theta = \underbrace{-\sin^{2l}\theta\cdot\cos\theta\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi}\cos\theta\,d\sin^{2l}\theta$

$$= 2l\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\sin^{2l-1}\theta\,d\theta$$
$$= 2l\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)\sin^{2l-1}\theta\,d\theta$$
$$= 2l\,(I_{2l-1} - I_{2l+1}) \quad \text{得到递推关系}$$

递推关系 $I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+1}I_{2l-1}$　$\therefore$ $I_{2l+1} = \frac{2^l\cdot l!}{(2l+1)!!}I_1$　显然 $I_1 = 2$

$$\therefore I_{2l+1} = \frac{2^{l+1}\cdot l!\,(2l)!!}{(2l-1)!!\,(2l)!!}$$
$$= \frac{2^{2l+1}\cdot(l!)^2}{(2l)!}$$

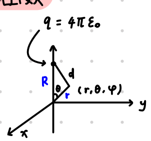
依次反代回①②得 $N_l^2 = \frac{2}{2l+1}$　$\therefore N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$　$(l = 0,1,2,3)$

此时的正交性变为：

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\cdot P_k(\cos\theta)\cdot\underbrace{\sin\theta}_{\text{权重}}\,d\theta = N_l^2\,\delta_{l,k}$$

轴对称球函数的应用

母函数



球对称，u与φ无关，$u(r,\theta)$

$d = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$

$u(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}$

当 $r \neq R$ 且 $\theta \neq 0$ 时，各点无电荷，$\Delta u(r,\theta) = 0$.

$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r)\,P_l(\cos\theta)$

不同表达方式 应结果相同.

解必能用本征函数展开.

$P_l(\cos\theta)$ 在球坐标下完备正交

$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0.$

$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$

$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = 0$

$r^2R_l''(r) + 2rR_l'(r) - l(l+1)R_l(r) = 0 \Rightarrow \boxed{R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}}$

由于电势在 $r=0$ 处必然有限 $\therefore B_l = 0$.

$\therefore u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}$

令 $\theta = 0$，$\cos\theta = 1$，$P_l(\cos\theta) = 1$ 特殊化

注意 $R>r$

$\therefore \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l = \frac{1}{R-r}\ (R>r) = \frac{1}{R}\frac{1}{1-\frac{r}{R}} = \frac{1}{R}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}$.（Taylor级数展开）

$\therefore u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$（$R>r$ 条件）

对于单位球，$R=1$，则有 $\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\theta) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}}$

若关于r作泰勒级数展开.
系数即为 $P_l(\ )$ 勒让德多项式
因此称为勒让德多项式的母函数

Legendre 多项式的母函数

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r<R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r>R \end{cases}$$

当 $R=1$ 时 $\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$, $r<1$ ($x=\cos\theta$.)

母函数公式

递推公式

两边同时对 r 求导 计算 递推公式

$$-\frac{1}{2}(1+r^2-2rx)^{-\frac{3}{2}}(2r-2x) = \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x) \quad ①$$

$-\frac{3}{2}$ 次项进行分拆. 用原式代替. 左边 $=(1+r^2-2rx)^{-1}(x-r)\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$

$\therefore$ ①式变为: $\sum_{l=0}^{\infty}\left[r^l x P_l(x) - r^{l+1}P_l(x)\right] = \sum_{l=0}^{\infty}\left[l r^{l+1}P_l(x) - 2xlr^lP_l(x) + lr^{l-1}P_l(x)\right]$

分析 r^k 项系数: $xP_k - P_{k-1} = (k-1)P_{k-1} - 2kxP_k + (k+1)P_{k+1}$

递推公式为 $\boxed{(k+1)P_{k+1} - (2k+1)xP_k + kP_{k-1} = 0}$ 并且 $P_0=1.\ P_1=x$

同样也可以对 x 两边求导

$$\frac{r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l'(x)$$

两边同乘 $(1-2rx+r^2)$ 得 $\frac{r}{(1-2rx+r^2)^{1/2}} = (1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l'(x)$

代入上式得 $r\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l'(x)$

分析 r^{k+1} 项系数. 得到 $P_k(x) = P_{k+1}'(x) - 2xP_k'(x) + P_{k-1}'(x)$ $(k\geq 1)$

此外还有公式 $(2k+1)P_k(x) = P_{k+1}'(x) - P_{k-1}'(x)$ $(k\geq 1)$

同时还可能 加减消元或整式求导.

实例应用

(1) $\Delta u = f(r,\theta) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ 轴对称与 φ 无关

先假定 $\Delta u=0$ $u=R(r)\Theta(\theta)$ 令 $x=\cos\theta$ 代入得关于 θ 的方程: $(1-x^2)\Theta''(x) - 2x\Theta'(x) + \lambda\Theta(x) = 0$. ($x\equiv\cos\theta$) ($\lambda = l(l+1)$) 自然边界条件

根据本征值: $\Theta_l(x) = P_l(x)$ 即 $u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R(r)P_l(\cos\theta)$ ①

$f(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r)P_l(\cos\theta)$ 得到广义 fourier 级数展开.

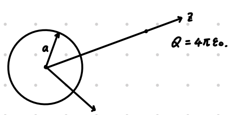
①式代入原方程: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = f(r,\theta)$

得到: $\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R'(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)\right]P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\theta)$

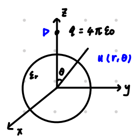
$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R'(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = f(l)$

展开即 $R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = f_l(r)$ 方程可解 $\boxed{R(r) = A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} + R_{特}}$ 通常利用中心有限 / 无穷远有限

(2)



转动坐标系后:



$\Delta u = -q\delta(\vec{r}-\vec{r_0})$

$u|_{r=0}$ = 有限

$u|_{r\to\infty}$ = 有限

$u|_{r=a^-} = u|_{r=a^+}$

$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 = 0$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla u$

$D_n = -\varepsilon_r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a^-} = -\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a^+}$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\vec{r})\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \longrightarrow A\delta(r-D)\delta(x-1) = q \longrightarrow A = \frac{q}{2\pi D^2}.$$

分成球内. 球外两部分

$U_i(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_i(r)P_l(\cos\theta)$ $r\leq a$

$U_e(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_e(r)P_l(\cos\theta)$ $r\geq a$

$U_e(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \frac{q}{\sqrt{D^2+r^2-2rD\cos\theta}}$

原有条件: $\Delta u = \frac{q}{2\pi D^2}\delta(r-D)\delta(\cos\theta-1) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\theta)$

$\therefore f_l =$

利用衔接条件 ($r=a$ 时) $U_e|_{r=a} = U_i|_{r=a}$

并且 $R_i(r) = A_l r^l + B_l\cdot\frac{1}{r^{l+1}}$. (关于 $r=0$ 或 $r\to\infty$ 时取有限值)

一部分电势由于球外点电荷. 一部分由于球上感应电荷.

证明自然边界条件的存在：

Legendre 方程的级数解

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}$$

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(一) 在 $x=\pm1$ 处发散

令 $y_0(\pm1)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ ， $y_1(\pm1)=\pm\sum_{k=0}^{\infty}v_k$

可以证明 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 在 k 较大时的各项比级数 $\sum_{k=2}^{\infty}w_k=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ 的对应项增长更快．若 $\sum_{k=2}^{\infty}w_k$ 发散，则 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 一定发散．

$$\because\ \frac{u_{k+1}}{u_k}\cdot\frac{1}{w_{k+1}}-\frac{1}{w_k}$$

$$=\frac{(2k-l)(2k+l+1)}{(2k+2)(2k+1)}(k+1)\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=\frac{(2k-l)l+(2k-l)(2k+1)}{2(2k+1)}\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=\left[k-\frac{l(2k+1)-(2k-l)l}{2(2k+1)}\right]\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=\left[k-\frac{l(l+1)}{2(2k+1)}\right]\ln(k+1)-k\ln k$$

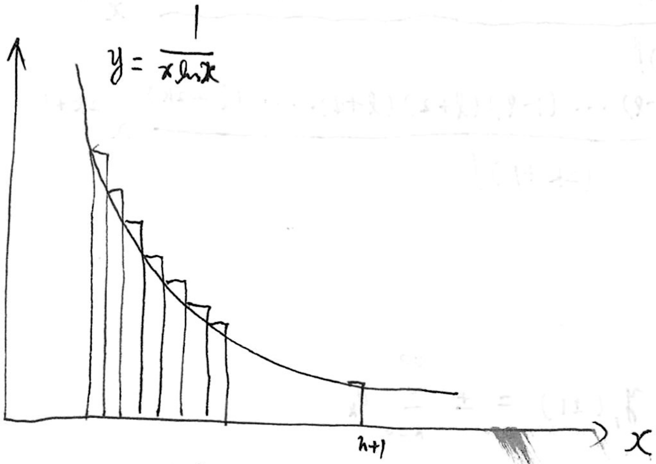
$$=k\ln\frac{k+1}{k}-\frac{l(l+1)}{2(2k+1)}\ln(k+1)\overset{k\to\infty}{=\!=}k\ln\frac{k+1}{k}$$

$$\cancel{\overset{k\to\infty}{=\!=}\lim_{k\to\infty}k\ln\frac{k+1}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}1-\frac{1}{2}k}$$

$$\overset{k=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}1-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{3}-\cdots=1$$

$$\therefore\ \frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{1}{w_{k+1}}-\frac{1}{w_k}\approx1>0\Rightarrow\frac{u_{k+1}}{u_k}>\frac{w_{k+1}}{w_k}$$

$$S_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}$$



$$S_n > \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$= \int_2^{n+1} \frac{1}{\ln x}\,d\ln x = \ln(\ln x)\Big|_2^{n+1}$$

$$= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{\text{when } n\to\infty} \infty$$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ 是发散的

$\therefore$ $y_0(\pm 1)$ 发散

同理可证 $y_1(\pm 1)$ 发散.

(二) $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ 在 $x=\pm 1$ 不可能同时收敛.

虽然 $y_0(\pm 1)$ 和 $y_1(\pm 1)$ 发散, 是否有可能通过线性组合得到有限的 $y(\pm 1)$ 呢? 可以证明 $y(+1)$ 有限或者 $y(-1)$ 有限是可能的, 但 $y(+1)$ 和 $y(-1)$ 同时有限的线性组合不存在.

证明如下: (反证法)

假设 存在有限的线性组合

由于原方程 $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$

在 $x \to -x$ 时不变 $\left(\begin{matrix}\text{因为}\\ y'' \to y''\end{matrix} \quad y' \to -y'\right)$

即若 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ 是方程的解，

那么 $y(-x) = a_0 y_0(-x) + a_1 y_1(-x)$ 也是方程的解，并在 $x=+1$ 和 $x=-1$

时有限，由于 $y_0(x)$ 是偶函数，$y_1(x)$ 是奇函数

所以 $y(-x) = a_0 y(x) - a_1 y(x)$

∵ $y(x)$ 和 $y(-x)$ 有限，

则 $y(x) + y(-x) = 2a_0 y_0(x)$ 也应有限，而事实上 $y_0(x)$ 发散

因此 $y(x)$ 在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 同时有限的假定不能成立。

证毕！

(三) 当 l 为整数时退化为多项式。

(四) 存在有界的边界条件。

若要求在 $x=\cos\theta=\pm1$ 时同时有限，则必须要求 l 为正整数，

本征值

§ 10.2 连带 Legendre 函数

$\Delta u=0$，$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$　　$\Delta u(r,\theta,\varphi)=f(r,\theta,\varphi)$ + 周期边界 + 自然边界 ⟶ 可以构成本征值问题

分离变量得到：

$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$．又有周期边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$　∴ $\Phi(\varphi)=A_m\sin m\varphi+B_m\cos m\varphi$　（m 为整数）

再令 $\cos\theta=x$，可得 $\boxed{(1-x^2)\Theta''(x)-2x\Theta'(x)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x)=0}$　连带 Legendre 函数

对于 $m=0$ 的轴对称情况，即见 10.1 节　　当要求 $\theta=0$，$\theta=\pi$ 时有有限解，只能 l 为整数，$\lambda=l(l+1)$

对于 $m\neq0$ 的一般情况：

级数法求解，出现 $Aa_k+Ba_{k+2}+Ca_{k+4}=0$　不容易计算

考虑 $\Theta(x)=(1-x^2)^A y(x)$ 的变换　希望简化方程

$\Theta'(x)=(1-x^2)^A y'(x)+A(1-x^2)^{A-1}(-2x)y(x)$

$\Theta''(x)=(1-x^2)^A y''(x)+A(1-x^2)^{A-1}(-2x)y'(x)-2A(1-x^2)^{A-1}y(x)+A(A-1)(1-x^2)^{A-2}(-2x)^2y(x)+A(1-x^2)^{A-1}(-2x)y'(x)$

全部代入连带 Legendre 函数 得：$(1-x^2)^{A+1}y''-4A(1-x^2)^A xy'(x)-2(1-x^2)^A xy'(x)-2A(1-x^2)^A y+[4A(A-1)(1-x^2)^{A-1}+4A(1-x^2)^{A-1}]x^2y+l(l+1)(1-x^2)^A y-m^2(1-x^2)^{A-1}y=0$

好处是递推公式方便得到.　整理得：$(4A^2x^2-m^2)(1-x^2)^{A-1}$ 应有 $4A^2x^2-m^2=-m^2(1-x^2)$；为了同除 $(1-x^2)^A$

∴ $A=\pm\frac{m}{2}$　即 $\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x)$

方程变为：$(1-x^2)y''(x)-2(m+1)xy'(x)+[l(l+1)-m(m+1)]y(x)=0$　①

对 Legendre 方程求 m 阶导数：$\left[(1-x^2)P_l''(x)-2xP_l'(x)+l(l+1)P_l(x)\right]^{[m]}=0$

一、定义

$(1-x^2)P_l^{[m]''}(x)-2(m+1)xP_l^{[m]'}(x)+[l(l+1)-m(m+1)]P_l^{[m]}=0$　②

可得 ① 与 ② 相同．即有 $\boxed{y(x)=P_l^{[m]}(x)}$

$\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)\equiv P_l^m(x)$　定义　（l 为整数，$m\le l$）　必须下标大于上标

定义式　∴ $\Theta(x)=P_l^m(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$　　同时 $P_l^{-m}(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$

看起来连带 Legendre 方程可以有两解．但只有一个能满足自然边界条件 ∴ $P_l^{-m}(x)$ 与 $P_l^m(x)$ 最多相差一个常数因子，不妨二者相除

∴ $\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)}=\frac{(1-x^2)^m\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l}{\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l}=\frac{(-x^2)^m(x^{2l})^{[l+m]}}{(x^{2l})^{[l-m]}}=\frac{(2l)!/(l-m)!}{(2l)!/(l+m)!}\cdot(-1)^m=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$

目的是为了得到本征函数．从而用本征函数展开得到 $\Theta(\theta)$

由此得到 $P_l^m(x)=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(x)$　以及 $P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$　转换公式

$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\left[f_{l,m}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi+\tilde f_{l,m}(r)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right]$

$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left[f_{l,m}(r)\cos m\varphi+\tilde f_{l,m}(r)\sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)$

& 　$r^2R_{l,m}''(r)+2rR_{l,m}'(r)-l(l+1)R_{l,m}(r)=f_{l,m}(r)$　解出 $R_{l,m}(r)$

二、正交性与模

分析 $P_l^m(x)$ 与 $P_k^m(x)$ 的关系.（S-L 本征值问题）　利用了上面公式进行转换.

$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\,dx\longrightarrow\int_{-1}^{1}P_l^m(x)\,(-1)^m\frac{(k+m)!}{(k-m)!}P_k^{-m}(x)\,dx$

$=\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$　两种不同写法

$=\frac{1}{2^l l!2^k k!}(-1)^m\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}(x^2-1)^k\,dx$

$=\frac{1}{2^l l!2^k k!}(-1)^{2m}\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\int_{-1}^{1}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\,dx$

$=\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\,dx$　（把系数搬进去）

$=\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\frac{2}{2l+1}\delta_{l,k}$

先看积分部分，利用分部积分

$=\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}(x^2-1)^k\,d\left(\frac{d^{l+m-1}}{dx^{l+m-1}}(x^2-1)^l\right)$

$=\underbrace{\left[\frac{d^{k-m}}{dx^{k-m}}(x^2-1)^k\cdot\frac{d^{l+m-1}}{dx^{l+m-1}}(x^2-1)^l\right]\Bigg|_0^1}_{=0}-\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{d^{l+m-1}}{dx^{l+m-1}}(x^2-1)^l\cdot\frac{d^{k-m+1}}{dx^{k-m+1}}(x^2-1)^k}_{\text{仅多了系数 }-1\text{，以及求导阶数递增/减}}$

如此重复分部积分 n 次

由此验证正交性．并得到模　$\boxed{N_l^m=\sqrt{\frac{(l+m)!\cdot2}{(l-m)!(2l+1)}}}$　上标 m 一定要小于下标 l

（$k\neq l$ 时 正交）

m 不变是因为 φ 相关的方程确定了 m

三、接下来进行广义 Fourier 级数展开.

$f(x)=\sum_l f_l P_l^m(x)$　m 确定，l 变化　（$l=k$ 时才有非零值）

$\underbrace{\int_{-1}^{1}f(x)P_k^m(x)\,dx}_{\text{用展开}}=\sum_{l=m}^{\infty}f_l\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\,dx=f_k\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\frac{2}{2k+1}$　∴ $\boxed{f_k=\frac{2k+1}{2}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_k^m(x)\,dx}$　等价于 $f_k=\frac{2k+1}{2}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_0^\pi f(\theta)P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$.

四、递推公式：

已知 legendre 多项式递推公式：$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0$

$(2k+1)P_k(x)=P_{k+1}'(x)-P_{k-1}'(x)$

上．下式分别求 m．(m-1) 阶导数．消元得

$\boxed{(2k+1)xP_k^m(x)=(k+m)P_{k-1}^m(x)+(k-m+1)P_{k+1}^m(x)}$　$(k\ge1)$

e.g. $P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)$　其中 $P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$

$P_1(x)=x=\cos\theta$

$P_1^0(x)=P_1(x)$；$P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\theta$；

§ 10.3 一般的球函数

(一) 定义

(1) 一般球函数的分离变数解：

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{Bmatrix} \quad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\cdots l \\ l=0,1,2\cdots \end{pmatrix}$$

(2) 复数形式解：

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = P_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi} \quad \begin{pmatrix} m=0,\pm1,\cdots\pm l \\ l=0,1,2\cdots \end{pmatrix}$$

(二) 正交关系与模

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\, Y_k^{n}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

P_l^m 与 P_k^n 本来没有正交关系，除非 $m=n$

$$=(N_l^m)^2\,\delta_{m,n}\,\delta_{l,k}$$

$$= \underline{2\pi\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\frac{2}{2l+1}}\,\delta_{m,n}\,\delta_{l,k}$$

模为 $N_l^m=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}$ （复数形式球函数的模） （但实变形式球函数的模 $N_l^m=\sqrt{\frac{2\pi}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{m,l}}$ ）

(三) 广义傅里叶级数展开.

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\left[A_{l,m}(r)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi + B_{l,m}(r)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right]$$ 实变函数形式

以 $\underline{P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi}$ 为基展开

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\,\underline{P_k^n(\cos\theta)\cos n\varphi}\,\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \underbrace{A_{k,n}(r)}_{\text{待求系数}}\,\frac{(k+n)!}{(k-n)!}\,\frac{2\pi}{2k+1}$$ 同理求出 $B_{l,m}(r)$

若考虑复变函数形式

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m} f_{l,m}(r)\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

同上，类似找基展开

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\,P_k^{|n|}(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = f_{k,n}(r)\,\frac{4\pi}{2k+1}\,\frac{(k+n)!}{(k-n)!}$$ 整理即得系数 $f_{k,n}(r)$

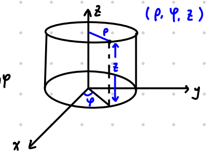
(四) 实例

第十一章 柱函数

§11.1 三类柱函数

$\Delta u=0$

分离变量 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)Z(z)\Phi(\varphi)$



(ρ,φ,z)

代入方程会得

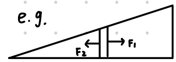
$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$ (1) $\quad\therefore\ \Phi(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi$

$Z''(z)-\mu Z(z)=0$ (2)

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\mu\rho^2-m^2)R(\rho)=0$ (3) Bessel方程

来源 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$

e.g.



$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$

$F=SYu_x\ ;\ S\propto x^2$

$F_1-F_2=\rho S\Delta x u_{tt}$

即 $(YSu_x)|_{x+\Delta x}-(YSu_x)|_x=\rho S\Delta x u_{tt}$

$\frac{Y}{\rho S}\frac{\partial(Su_x)}{\partial x}=u_{tt}$

即 $\frac{Y}{\rho}(u_{xx}+\frac{2}{x}u_x)=u_{tt}$

分子取决于 S 与 x 关系

由此 为了让 u_x 系数为1. 要乘以 μ 系数

*: 对于(2)式. 只要柱坐标上下顶面为齐次方程. 就限制 $\mu<0$

对于(3)式. 若有 $u|_{\rho=\rho_0}=0$ 就限制 $\mu>0$

(3)式当 $\mu>0$: Bessel方程. $\mu<0$: 虚宗量Bessel方程 重点考虑(3)式的解

(一) 三类柱函数

$\mu\rho^2\frac{d^2R}{\mu d\rho^2}+\sqrt{\mu}\rho\frac{dR}{\sqrt{\mu}d\rho}+(\mu\rho^2-\nu^2)R(\rho)=0$

$\boxed{令\ \sqrt{\mu}\rho=x}$

变换为 $x^2R''(x)+xR'(x)+(x^2-\nu^2)R(x)=0$

$x=0$ 为方程正则奇点, 作洛朗级数展开. 得到 $R(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ 其中已知 $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{\nu+2k}$, $J_{-\nu}(x)$ 同理 Bessel 函数

$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ 第二类贝塞尔函数 (诺伊曼函数)

当 ν 为整数

$N_\nu(x)=\frac{\lim\frac{d}{d\nu}(J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x))}{\pi\cos\nu\pi}$ $\quad\therefore N_m(x)=(-1)^m\frac{1}{\pi}[J_\nu(x)\cos m\pi-J_{-\nu}(x)]'|_{\nu=m}$

得到 $\boxed{y_2=Ay_1\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{-m+k}}$ 是方程的解

$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x)$

$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x)$

汉克尔函数

(二) 渐近行为

1) $x\to0$: $J_0(x)\to1$ $\quad J_\nu(x)\to0$ $\quad J_{-\nu}(x)\to\infty$ $\quad(\nu>0$ 时$)$

$N_0(x)\to-\infty$. $\quad N_\nu(x)\to\pm\infty$

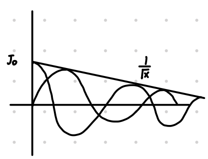
2) $x\to\infty$:

$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

$N_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

$H_\nu^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}$

$H_\nu^{(2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}$



强度 I: $\frac{1}{x}$ 衰减

(三) 递推公式

$J_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{\nu+2k}$ ν 可能非整数不方便求导, 要降掉

中间推导待补充

已知 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$\frac{d}{dx}(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu})=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$; $\qquad\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$

$\Rightarrow\frac{J_\nu'(x)}{x^\nu}-\nu\frac{J_\nu(x)}{x^{\nu+1}}=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$ 以及 $x^\nu J_\nu'(x)+\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)=x^\nu J_{\nu-1}(x)$

即 $\boxed{J_{\nu+1}=-J_\nu'(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)}$ $\qquad$ 即 $\boxed{J_\nu'(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)}$ $\longrightarrow$ 综合得到 $\boxed{J_{\nu+1}(x)-J_{\nu-1}(x)+2J_\nu'(x)=0}$ (不包含单独 x)

或 $\boxed{J_{\nu+1}(x)-\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)+J_{\nu-1}(x)=0}$ (不包含导数)

§ 11.2 Bessel 方程的本征值问题

回顾： $\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+[\mu\rho^2-\nu^2]R(\rho)=0$

若 $\mu>0$，可令 $\sqrt{\mu}\rho\equiv x$

方程变为 $x^2R''(x)+xR'(x)+[x^2-\nu^2]R(x)=0$

$R(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$?

其中： $\boxed{J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}$

$\boxed{N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}}$

递推关系： $\boxed{J_{\nu+1}(x)-J_{\nu-1}(x)+2J_\nu'(x)=0}$

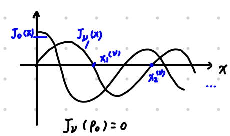
$\boxed{J_{\nu+1}(x)-\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)+J_{\nu-1}(x)=0}$

（一）贝塞尔函数与本征值问题

无穷多个零点 $x_n^{(\nu)}$，对应无穷多本征值 $\mu_n^{(\nu)}=\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\right)^2$ 及本征函数 $J_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho)$，$0\le\rho\le\rho_0$

展开得 $f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nJ_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho)$ 可以用 ρ 作级数展开.

对于 $u(\rho,\varphi,z)$ 问题. φ 必有本征值. 另外选取 ρ / z 找本征值要根据题目（非齐次方程，假设 ρ 齐次）



$J_\nu(\rho_0)=0$

$\Rightarrow\ \mu_n^{(\nu)}=\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\right)^2$

$\mu<0$

$\mu<0$ 为虚宗量 Bessel 方程. 不存在本征值问题

接下来具体求解 Bessel 方程

$\mu=0$

① $\mu=0$ （且 $\nu\ne0$）

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\nu^2R(\rho)=0$ 可用级数解法

解得： $\boxed{R(\rho)=A\rho^{\nu}+B\rho^{-\nu}}$

② $\nu=0$；$\mu=0$

$\rho\frac{dR'(\rho)}{d\rho}+R'(\rho)=0$.

可得 $R'(\rho)=\frac{C_0}{\rho}$ $\therefore\ \boxed{R(\rho)=C_0\ln\rho+D}$ （C_0, D 为常数）

$\mu>0$

③ $\mu>0$.

经过 $\sqrt{\mu}\rho\equiv x$. 已变为 $x^2R''(x)+xR'(x)+[x^2-\nu^2]R(x)=0$

解为 $\boxed{R(\rho)=J_\nu(\sqrt{\mu}\rho)}$

★按边界条件类型分类讨论

(i) 第一类齐次边界条件

即 $R(\rho_0)=0$

$\therefore\ J_\nu(x_n^{(\nu)})=0$. $n=1,2,3\ldots$ 零点

本征值 $\mu_n^{(\nu)}=\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\right)^2$

本征函数 $J_\nu\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$. $0\le\rho\le\rho_0$

(ii) 第二类齐次边界条件

即 $\left.\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=0$ 与 (i) 中含义位置不同

也存在无穷多极值点 $\longrightarrow$ $J_\nu'(x_n^{(\nu)})=0$ 极值点

$\mu_n^{(\nu)}=\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\right)^2$ $J_\nu\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$ 与 (i) 只是形式相同

递推： $J_\nu'(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$

$J_0'(x)=-J_1(x)$

(iii) 第三类齐次边界条件

$R(\rho_0)+HR'(\rho_0)=0$

$J_\nu(\sqrt{\mu}\rho_0)+H\sqrt{\mu}\left.\frac{dJ_\nu(\sqrt{\mu}\rho)}{\sqrt{\mu}\,d\rho}\right|_{\rho_0}\xlongequal[\text{递推}]{H\sqrt{\mu}\cdot[J_\nu(\sqrt{\mu}\rho)]'}J_\nu(\sqrt{\mu}\rho_0)+H\sqrt{\mu}\left[-J_{\nu+1}(\sqrt{\mu}\rho_0)+\frac{\nu}{\sqrt{\mu}\rho_0}J_\nu(\sqrt{\mu}\rho_0)\right]=0$

即得 $J_\nu(\sqrt{\mu}\rho_0)=\frac{\sqrt{\mu}\rho_0}{\rho_0/H+\nu}J_{\nu+1}(\sqrt{\mu}\rho_0)$

$J_\nu(x)=\frac{x}{\frac{\rho_0}{H}+\nu}J_{\nu+1}(x)$ 从中可以解出 $x_n^{(\nu)}$（两个函数的交点，无穷多），进而 $\mu_n^{(\nu)}=\left(\frac{x_n^{(\nu)}}{\rho_0}\right)^2$

三类齐次边界方程对应的 $x_n^{(\nu)}$ 含义不同是不同方程的解

（二）贝塞尔函数的正交关系

$$\int_0^{\rho_0}J_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho)J_\nu(\sqrt{\mu_m^{(\nu)}}\rho)\,\rho\,d\rho=(N_n)^2\delta_{n,m}$$

权重（可根据量纲）

（三）贝塞尔函数的模

$$(N_n^{(\nu)})^2=\int_0^{\rho_0}[J_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0)]^2\rho\,d\rho$$

$$=\frac{1}{\mu_n^{(\nu)}}\int_0^{x_0}[J_\nu(x)]^2x\,dx$$ （$x_0=\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0$）

分部积分 $$=\frac{1}{2\mu_n^{(\nu)}}\int_0^{x_0}[J_\nu(x)]^2\,dx^2$$

利用原方程 $$=\frac{1}{2\mu_n^{(\nu)}}x^2J_\nu^2(x)\Big|_0^{x_0}-\frac{1}{2\mu_n^{(\nu)}}\int_0^{x_0}x^2\,2J_\nu(x)J_\nu'(x)\,dx$$

$x^2J_\nu''(x)+xJ_\nu'(x)+[x^2-\nu^2]J_\nu(x)=0$ 即有 $x^2J_\nu(x)=\nu^2J_\nu(x)-x^2J_\nu''(x)-xJ_\nu'(x)$

$\therefore\ x^2J_\nu(x)J_\nu'(x)=\left[\nu^2J_\nu(x)-x^2J_\nu''(x)-xJ_\nu'(x)\right]J_\nu'(x)$

代换目的是凑全微分 $=\frac{1}{2}\left[\nu\frac{d}{dx}(J_\nu(x))^2-\frac{d}{dx}(xJ_\nu'(x))^2\right]$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(\nu)}}\left\{x^2J_\nu^2(x)\Big|_0^{x_0}-\left[\nu^2J_\nu^2(x)-(xJ_\nu'(x))^2\right]\Big|_0^{x_0}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(\nu)}}\left\{(x^2-\nu^2)J_\nu^2(x)+(xJ_\nu'(x))^2\right\}\Big|_0^{x_0}$$

原因：$J_\nu(x_0)=0$

$=\begin{cases}\text{第一类齐次边界条件} & x_0^2(J_\nu'(x_0))^2\ \text{即}\ \frac{1}{2}\rho_0^2\left(J_\nu'(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0)\right)^2\xlongequal{\text{递推公式}}\frac{1}{2}\rho_0^2\left[J_{\nu+1}(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0)\right]^2\\ \text{第二类齐次边界条件} & J_\nu'(x_0)=0\quad\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{\nu^2}{\mu_n^{(\nu)}}\right)\left[J_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0)\right]^2\\ \text{第三类齐次边界条件} & \frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{\nu^2}{\mu_n^{(\nu)}}+\frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(\nu)}\cdot H}\right)\left[J_\nu(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho_0)\right]^2\end{cases}$

(四) 广义傅里叶级数展开

$$\boxed{f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n J_\nu\left(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho\right)}$$

$$f_n=\frac{1}{N_n^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho)J_\nu\left(\sqrt{\mu_n^{(\nu)}}\rho\right)\rho\, d\rho$$

若讨论区间 $\rho_0\longrightarrow\infty$: $\mu_{n+1}^{(\nu)}-\mu_n^{(\nu)}\longrightarrow 0$ 间隔足够小，求和变为积分

$$\begin{cases} f(\rho)=\int_0^{\infty} F(\omega)J_\nu(\omega\rho)\,\omega\, d\omega \\ F(\omega)=\int_0^{\infty} f(\rho)J_\nu(\omega\rho)\,\rho\, d\rho \end{cases} \longrightarrow \text{广义傅立叶积分和变换}$$

(五) 母函数

Bessel 函数的母函数

$$\boxed{e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}}=e^{\frac{x}{2}z}\cdot e^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{z}}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)\,z^m$$ 恰好洛朗级数展开系数是 m 阶 Bessel 函数

令 $z=e^{i\varphi}$ 上式变为 $e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}=e^{ix\sin\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)\,e^{im\varphi}$

$$\boxed{e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)\,z^m}$$ 母函数

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a+b)z^m=e^{\frac{a+b}{2}(z-\frac{1}{z})}=e^{\frac{a}{2}(z-\frac{1}{z})}\cdot e^{\frac{b}{2}(z-\frac{1}{z})}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a)z^n\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b)z^k$$

考虑系数相等: $\boxed{J_m(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b)J_{m-k}(a)}$ 加法公式

(六) 应用举例

$\vec F=q\vec E+q\vec v\times\vec B$ （带电粒子电磁场中受力）

$\vec v=\vec u+\vec v'$ （变换坐标系）

则 $\vec F=q\vec E+q(\vec u\times\vec B)+q(\vec v'\times\vec B)$

$=m\frac{dv'}{dt}$ （u为常数）

若能让 $q\vec E+q(\vec u\times\vec B)=0$ 则 $\vec F=q(\vec v'\times\vec B)$

在新坐标中作圆周运动

此时需要 $\vec E+\vec u\times\vec B=0$

$\therefore \vec E\times\vec B+(\vec u\times\vec B)\times\vec B=0$

$E\times\vec B+(\vec u\cdot\vec B)\vec B-(\vec B\cdot\vec B)\vec u_\perp=0$

应有 $\vec u\perp\vec B$ 且 $\vec u_\perp=\frac{\vec E\times\vec B}{B^2}$

且在原坐标中沿 $\vec E\times\vec B$ 方向运动

$$\boxed{\begin{aligned}\vec B&=B_0\vec e_z \quad \text{静电波}\\ \vec E&=E_0\sin(kx-\omega t)\vec e_x\\ &=E_0\,\mathrm{Im}\,e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}\vec e_x\end{aligned}}$$

$\nabla=\vec e_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec e_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec e_z\frac{\partial}{\partial z}$

(i) $\nabla\times\vec E=i\vec k\times\vec E$ （纵波）

(ii) $\nabla\times\vec B=0$ 要有 $\vec J+\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}=0$

即 $\vec J=i\omega\varepsilon_0\vec E$

(iii) $\nabla\cdot\vec E=i\vec k\cdot\vec E=\rho/\varepsilon_0$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot\vec E&=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec E&=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec B&=0\\ \nabla\times\vec B&=\mu_0\vec J+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}\end{aligned}}$$

$$\vec F=q\vec E+q\vec v\times\vec B=m\frac{d\vec v}{dt}$$

$$\begin{cases}\vec e_x: & m\frac{dV_x}{dt}=qE_0e^{i(kx-\omega t)}+qV_yB_0 \quad ①\\ \vec e_y: & m\frac{dV_y}{dt}=-qV_xB_0 \quad\Longrightarrow\quad V_y=-\frac{qB_0}{m}(x-x_0) \quad ②\\ \vec e_z: & m\frac{dV_z}{dt}=0\end{cases}$$

② 代入 ① 得: $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_c^2x=\varepsilon e^{i(kx-\omega t)}$ $\left(\omega_c=\frac{qB}{m},\ \varepsilon=\frac{qE}{m}\right)$

分类讨论:

(i) $k=0$ 时 $\ddot x+\omega_c^2x=\varepsilon e^{-i\omega t}$ （受迫振动） 解只取虚部

(ii) 微扰展开

$\ddot x_0+\omega_c^2x_0=0$ （$\varepsilon=0$ 时）

$x_0(t)=r_L\cos(\omega_ct+\varphi_0)$

$\underline{x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots}$ 精度决定具体几项

$e^{ik(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots)-i\omega t}$

$=e^{i(kx_0-\omega t)}\cdot e^{i(\varepsilon kx_1+\varepsilon^2kx_2+\cdots)}$ 小量展开

$=e^{i(kx_0-\omega t)}\cdot\left[1+i\varepsilon kx_1+i\varepsilon^2kx_2-\varepsilon^2k^2x_1^2(t)+\cdots\right]$

$\ddot x(t)=\ddot x_0(t)+\varepsilon\ddot x_1(t)+\varepsilon^2\ddot x_2(t)+\cdots$

ε^0: $\ddot x_0+\omega_c^2x_0(t)=0$

ε^1: $\ddot x_1+\omega_c^2x_1(t)=e^{i(kx_0-\omega t)}$ ①

ε^2: $\ddot x_2+\omega_c^2x_2(t)=e^{i(kx_0-\omega t)}kx_1$

从 $x_0(t)$ 开始可以逐阶求解。 先令 $x_0(t)=r_L\sin\omega_ct=r_Le^{i\omega_ct}$ （虚部）

代入 ① 式有 $\ddot x_1+\omega_c^2x_1(t)=e^{ikr_L\sin\omega_ct-i\omega t}$

已知母函数 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)z^m$. $\therefore$ $\boxed{e^{ix\sin\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)e^{im\varphi}}$

① 方程变为 $\ddot x_1+\omega_c^2x_1(t)=e^{-i\omega t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(kr_L)e^{im\omega_ct}$ ②

令 $x_1(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_me^{i(m\omega_c-\omega)t}$ 再代入② 求 A_m 从而得到 $x_1(t)$

$\underline{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[-(m\omega_c-\omega)^2A_m+\omega_c^2A_m\right]e^{i(m\omega_c-\omega)t}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(kr_L)e^{i(m\omega_c-\omega)t}}$

$\therefore A_m=\frac{J_m(kr_L)}{\omega_c^2-(m\omega_c-\omega)^2}$

分母为0时出现共振，即 $(m\pm1)\omega_c=\omega$ 共振项单独考虑 $\Longleftarrow$

非线性加热 $N\omega=n_1\omega_1+n_2\omega$

例 2.

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = A \sin \omega t$$

$$u|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$u|_{t=0} = 0 \; ; \quad u_t|_{t=0} = 0$$

解: $u(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})\, T(t)$

先假设齐次方程. $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ 分离变量代入: $T''(t) V(\vec{r}) - a^2 T(t) \Delta V(\vec{r}) = 0$

$\therefore \dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -k^2$ 以及 $\Delta v + k^2 v = 0$ $\left(v|_{\rho=\rho_0} = 0 \right)$

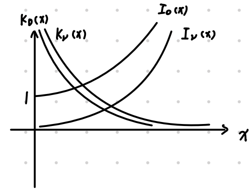
$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\underbrace{\dfrac{\partial V}{\partial \varphi^2}}_{-m^2 V} + k^2 V(\rho, \varphi) = 0$ 由于 $V(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ 代入左边方程得 $\dfrac{\Phi(\varphi)}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{dR}{d\rho}\right) + \dfrac{R(\rho)}{\rho^2}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$ 同乘 ρ^2 再同除 $R(\rho)\Phi(\varphi)$

可得 $\dfrac{\rho}{R(\rho)}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho \dfrac{dR}{d\rho}\right) + \dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2\rho^2 = 0$ 可以得出 $\dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2$ 即 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (k^2\rho^2 - m^2) R(\rho) = 0$

$$\boxed{R(\rho) = C_1 J_m(k\rho) + C_2 N_m(k\rho)}$$

$$k_n = \frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}$$

§ 11.4 虚宗量 Bessel 方程



$\rho^2 \frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \rho\frac{dR(\rho)}{d\rho} + [\mu\rho^2 - \nu^2]R(\rho) = 0$

若 $\mu<0$，令 $x \equiv \sqrt{-\mu}\,\rho$

方程变为 $x^2R''(x) + xR'(x) - [x^2+\nu^2]R(x) = 0$ ① 虚宗量 Bessel 方程

令 $x \longrightarrow ix$

方程变为 $x^2R''(x)+xR'(x)+[x^2-\nu^2]R(x)=0$

解应为 $R(x) = C_1 J_\nu(ix) + C_2 N_\nu(ix)$

$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$

$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(i)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$

$= i^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$ 二者相差 $i^{-\nu}$（常数）

引入 虚宗量 Bessel 函数

$\boxed{I_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}$ 显然也是 ① 的解. 没有零点. 不满足边界条件. 不存在本征值问题

$J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$

$x\longrightarrow 0$ 时 $I_\nu(x) \longrightarrow 0$

$x\longrightarrow \infty$ 时 $I_\nu(x) \longrightarrow \infty$

虚宗量 Bessel 方程 的两部分解

前节已知 $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$ 是 Bessel 方程的解; $H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)$ 是虚宗量 Bessel 方程的解

且有 $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ $\quad N_\nu(ix) = \frac{J_\nu(ix)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(ix)}{\sin\nu\pi} = \frac{i^\nu I_\nu(x)\cos\nu\pi - i^{-\nu}I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$ 利用 $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\cos\nu\pi = \frac{e^{i\nu\pi}+e^{-i\nu\pi}}{2}$

$H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix)+iN_\nu(ix) = e^{i\frac{\pi}{2}\nu}I_\nu(x) + i\cdot\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\nu}\left(\frac{e^{i\nu\pi}+e^{-i\nu\pi}}{2}\right)I_\nu(x) - e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = ie^{-i\frac{\nu}{2}\pi}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$

定义 $\boxed{K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}}$ （实函数） 虚宗量汉克尔函数

$x\longrightarrow 0$ 时 $K_\nu(x)\longrightarrow\infty$； $x\longrightarrow\infty$ 时 $K_\nu(x)\longrightarrow 0$

$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}e^{-x}$； $I_\nu(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}$

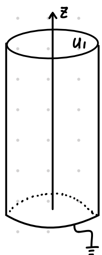
主要影响不同研究区域对 $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ 的选择.

综合得解为 $R(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x)$

如果讨论对称轴附近，则 K_ν 发散. 应 $B=0$

反之讨论无穷远，则 I_ν 发散. 应 $A=0$

[实例]



$u|_{\rho=\rho_0} = \frac{u_0}{L}z$

讨论 $\rho>\rho_0$ 区域情况:

建立定解问题 $\Delta u = 0$

$u|_{z=0} = 0$

$u|_{z=L} = u_1$

$u|_{\rho=\rho_0} = \frac{u_0}{L}z$

$u|_{\rho\to\infty}$ 有限

柱对称，与 φ 无关. $u(\rho,z)$

$\boxed{u = \frac{u_1}{L}z + w}$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}}_{=0} + \frac{\partial^2u}{\partial z^2} = 0$

对于 w 有 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2w}{\partial z^2} = 0$ ①

那么 $w|_{z=0} = 0$. $w|_{z=L} = 0$

$w|_{\rho=\rho_0} = \frac{u_0-u_1}{L}z$. $w|_{\rho\to\infty}$ 有限

$w(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$

代入有 $\left[R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\right]Z(z) + Z''(z)R(\rho) = 0$

同除 $Z(z)R(\rho)$ 有: $\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\mu$ 即 $Z''(z)+\mu Z(z) = 0$ (i)

同时 $R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)-\mu R(\rho) = 0$ (ii)

对于 (i) 有 $Z(z) = \sin\frac{n\pi}{L}z$, $\mu = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

$\boxed{W(\rho,z) = \sum_{n=1}^\infty R_n(\rho)\sin\frac{n\pi}{L}z}$ 展开. 代入①式

$\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\left[R_n''(\rho)+\frac{1}{\rho}R_n'(\rho)-\frac{n^2\pi^2}{L^2}R_n(\rho)\right]}_{=0}\sin\frac{n\pi}{L}z = 0$

也就是 $\rho^2R_n''(\rho)+\rho R_n'(\rho)-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\rho^2R_n(\rho) = 0$

解为 $R_n(\rho) = D_nI_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) + C_nK_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right)$

由于 $\rho\to\infty$ 时 W 有限 $\Rightarrow D_n = 0$

$\boxed{\therefore W(\rho,z) = \sum_{n=1}^\infty C_nK_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{L}z}$

两个变量的问题只需要找一个本征函数

然后另一个用级数展开去代边界条件

再利用边界条件 $W|_{\rho=\rho_0} = \sum_{n=1}^\infty C_nK_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho_0\right)\sin\frac{n\pi}{L}z = \frac{u_0-u_1}{L}z$.

等式两边同乘 $\sin\frac{m\pi}{L}z$ 再积分. 利用 sin 正交性 级数只留 $m=n$ 一项

$C_mK_0\left(\frac{m\pi}{L}\rho_0\right)\underbrace{\int_0^L\left(\sin\frac{m\pi}{L}z\right)^2dz}_{\frac{L}{2}} = \int\frac{u_0-u_1}{L}z\cdot\sin\frac{m\pi}{L}z\,dz$

$C_m = -\frac{2}{L}\cdot\frac{1}{K_0\left(\frac{m\pi}{L}\rho_0\right)}\cdot\frac{u_0-u_1}{L}\int_0^L z\cdot\frac{L}{m\pi}\,d\left(\cos\frac{m\pi}{L}z\right)$.

$= \cdots = (-1)^{m+1}\cdot\frac{2(u_0-u_1)}{m\pi\cdot K_0\left(\frac{m\pi}{L}\rho_0\right)}$ 同理可得 C_n.

综上 $W(\rho,z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2(u_0-u_1)\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi\cdot K_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho_0\right)}\cdot\sin\frac{n\pi}{L}z$ 即可得 $u(\rho,z)$

§ 11.5 球 Bessel 方程

$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(\vec{r},t)$

$u|_{r=r_0} = g(\theta,\varphi,t)$

$u|_{r=0}$ 有限

$u|_{t=0} = \varphi(\vec{r})$

$u_t|_{t=0} = \psi(\vec{r})$

先根据对称性选择球坐标

$u = g(\theta,\varphi,t) + w(r,\theta,\varphi,t)$

代入得 $w_{tt} - a^2\Delta w = \tilde{f}(r,\theta,\varphi,t)$

$w|_{r=r_0} = 0$

$u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\vec{r})$

$u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(\vec{r})$

先令 $w_{tt} - a^2\Delta w = 0$

且 $w|_{r=r_0} = 0$ 处理本征值问题

令 $w(\vec{r},t) = T(t)V(\vec{r})$ 代入

$$\begin{cases} \Delta V + k^2 V(\vec{r}) = 0 \\ V|_{r=r_0} = 0 \quad \text{(任意时刻都满足)} \end{cases}$$

$V(r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m} R_{l,m}(r) Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (m<l)$

$V(\vec{r}) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ 形式

方程变为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + k^2 V = 0$$

$$\sum_{l,m}\left\{ Y_{l,m}(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{l,m}(r)}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}Y_l^m(\theta,\varphi)R_{l,m}(r) + k^2 Y_l^m(\theta,\varphi)R_{l,m}(r)\right\} = 0$$

乘进去 $R''_{l,m}(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_{l,m}(r) = 0$

同乘 r^2. $r^2R''(r) + 2rR'(r) + [k^2r^2 - l(l+1)]R(r) = 0$ l 阶球 Bessel 方程.

希望消去 2 ，目的是得到 k 本征值问题

令 $x = kr$

得到 $x^2R''(x) + 2xR'(x) + [x^2 - l(l+1)]R(x) = 0$

变换 $\boxed{令\ R_{l,m}(r) = x^{\alpha}y(x)}$

希望变换为 $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-\nu^2)y(x) = 0$ 即 Bessel 方程

$R_{l,m}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,y(x)$ $\alpha = -\frac{1}{2}$. 符合要求.

变换为 $x^2y''(x) + xy'(x) + \left[x^2 - (l+\frac{1}{2})^2\right]y(x) = 0$ $\nu = l + \frac{1}{2}$

即为Bessel方程

$\boxed{y(x) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 N_{l+\frac{1}{2}}(x)}$

$\boxed{R_{l,m}(r) = C_1 j_l(r) + C_2 n_l(r)}$ 分别为球贝塞尔函数和球诺伊曼函数

再定义：

$$\boxed{\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,N_{l+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned}}$$

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} \quad (\nu = \tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\sin x}{x}$$

利用 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

下面对球 Bessel 方程求解

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

已有递推公式, 考虑先求初项

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$$

$\Gamma(k+\frac{3}{2}) = \frac{(2k+1)(2k-1)\cdots1}{2^{k+1}}\Gamma(\frac{1}{2})$

$k!\,2^k = 2\cdot4\cdots(2k-2)(2k)$

由此得 $k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})\cdot2^{2k+1} = (2k+1)!$

具体计算过程

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \quad (t \to x^2)$

$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

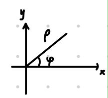
$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = 4\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy$

$= 4\iint_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

$= 4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$

$= 2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^\infty e^{-\rho^2}d\rho^2 = \pi$

$\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$



又有 $R(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{l+\frac{1}{2}}(x) \equiv j_l(x)$; $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,N_{l+\frac{1}{2}}(x) \equiv n_l(x)$

故得 $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ $n_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)\cos\frac{\pi}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{\sin\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = -\frac{\cos x}{x}$

对于 $R(r)$ 其应与 $\frac{1}{r}$ 成正比, 不妨设 $R(r) = \frac{y(r)}{r}$ 代入球 Bessel 方程: 从物理角度看球面波

$R'(r) = \frac{y'(r)}{r} - \frac{y(r)}{r^2}$

$R''(r) = \frac{y''(r)}{r} - \frac{y'(r)}{r^2} + 2\frac{y(r)}{r^3}$ 即 $y''(r) + k^2y(r) = 0$ 解得 $\boxed{y(r) = A\sin kr + B\cos kr}$

$R(r) = \tilde{C_1}j_l(kr) + \tilde{C_2}n_l(kr)$

且已有 $j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$, $n_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}$ 当 $r \to 0$ 时 $n_0(kr)$ 发散. 故若讨论球内解. 应有 $\tilde{C_2} = 0$ 实际问题要考虑是否舍去某一部分

下面还需推导递推公式:

可得 $Z_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu Z_\nu(x)}{x} + Z_{\nu-1}(x) = 0$ 递推公式

由此得 $j_1(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x)$; $n_1(x) = -\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x)$

对于球 Bessel 方程, 若有边界条件 $R(r)|_{r=r_1} = 0$, $R'(r)|_{r=r_2} = 0$, 有 $\begin{cases} C_1 j_l(kr_1) + C_2 n_l(kr_1) = 0 & (1) \\ C_1 k j_l'(kr_2) + C_2 k n_l'(kr_2) = 0 & (2) \end{cases}$ 由(1)得 $C_1 = -\frac{n_l(kr_1)}{j_l(kr_1)}C_2$ 代入(2)得:

$-\frac{n_l(kr_1)}{j_l(kr_1)}j_l'(kr_2) + n_l'(kr_2) = 0$

可以得到: $\frac{n_l(kr_1)}{j_l(kr_1)} = \frac{n_l'(kr_2)}{j_l'(kr_2)}$

$$\boxed{R_n(k_nr) = -\frac{n_l(k_nr_1)}{j_l(k_nr_1)}j_l(k_nr) + n_l(k_nr)}$$

$u(\vec{r},t) = \sum_{n,l,m}T_{n,l,m}(t)R_n(k_nr)Y_l^m(\theta,\varphi)$

两边同乘再展开(积分)

代入最初方程 $T''_{n,l,m}(t) + a^2k_n^2T_{n,l,m}(t) = f_{n,l,m}(t) = \frac{1}{N^2_{n,l,m}}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}f(\vec{r},t)R_n(k_nr)Y_l^m(\theta,\varphi)\,r^2dr\,\sin\varphi\,d\varphi$

具体应用

$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t)\delta(r - r_0)$ 见教材例题

第十二章　格林函数法

Green Function

§ 12.1 泊松方程的格林函数法

$\Delta u = f(\vec r) = -\frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$　　格林函数 代表点源在一定边界或初始条件下所产生的场.

$= \iiint f(\vec r_0)\,\delta(\vec r-\vec r_0)\,d^3\vec r_0$

$= f(\vec r_0)\iiint \delta^3(\vec r-\vec r_0)\,\delta^3\vec r_0$

已知公式：　　u, v 定义在同一个空间内

$\oiint_\Sigma (u\nabla\vec v)\cdot d\vec s = \iiint_T \nabla(u\nabla\vec v)\,d^3V$

$\oiint_\Sigma (v\nabla u)\cdot d\vec s = \iiint \nabla\cdot(v\nabla u)\,d^3V$　　　$\oiint \vec E\cdot ds = \iiint \nabla\cdot\vec E\,dV$

两式联立得　$\oiint (u\nabla v - v\nabla u)\,d\vec s \xlongequal{\text{代入式}} \iiint_T (\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v - \nabla v\cdot\nabla u - v\Delta u)\,d^3V$　　由边界条件 ⟶ 体内分布

即　$\oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iiint_T (u\Delta v - v\Delta u)\,d^3V$　　第二格林函数　　利用 Stokes 公式

例题：　$\Delta u = f(\vec r)$

$(\partial u + \beta\nabla u)|_\Sigma = \varphi(M)$　　统一表示三类边界条件

首先寻找格林函数 G：

满足 $\begin{cases}\Delta G(\vec r,\vec r_0) = \delta(\vec r-\vec r_0)\\ (\partial G + \beta\nabla G)|_\Sigma = 0\end{cases}$　　其中 $G(\vec r,\vec r_0)$ 称为格林函数，u 可以用 G 经积分求得

$\boxed{\Delta G(\vec r,\vec r_0) = \delta(\vec r-\vec r_0)}$ 则说明点电荷带负电　　$\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_0$，$\vec E = -\nabla u$

由已知定理.　$\oiint_\Sigma u\nabla v\cdot d\vec s = \iiint_T \nabla\cdot(u\nabla v)\,d^3V$　　高斯定理

同理　$\oiint_\Sigma v\nabla u\cdot d\vec s = \iiint_T \nabla\cdot(v\nabla u)\,d^3V$　⟶　作差：　$\oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot ds = \iiint_T (u\nabla v - v\nabla u)\,d^3V$　　注意沿 n 方向，变为面积分

在本题中可写为：（V 即为 G）

$\oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot ds = \iiint_T [u\delta(\vec r-\vec r_0) - Gf(\vec r)]\,d^3V \xlongequal{\text{挑选性}} u(\vec r_0) - \iiint_T Gf(\vec r)\,d^3V$　☆

(1) 第一类边界条件（$\beta = 0$，$u|_\Sigma = \frac{\varphi(M)}{\alpha}$，$G|_\Sigma = 0$）

$u(\vec r_0) = \iiint G(\vec r,\vec r_0)f(\vec r)\,d^3\vec r + \oiint_\Sigma \frac{1}{\alpha}\varphi(M)\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n}ds$　　$\boxed{\vec r_0\text{与}\vec r\text{进行互换}}$

$u(\vec r) = \iiint G(\vec r_0,\vec r)f(\vec r_0)\,d^3\vec r_0 + \oiint_\Sigma \frac{1}{\alpha}\varphi(M)\frac{\partial G(\vec r_0,\vec r)}{\partial n}dS_0$

$= \iiint G(\vec r,\vec r_0)f(\vec r_0)\,d^3\vec r_0 + \oiint_\Sigma \frac{1}{\alpha}\varphi(M)\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n}dS_0$　　$\boxed{G(\vec r,\vec r_0) = G(\vec r_0,\vec r)}$

(2) 第三类边界条件　　在边界上同乘 G 和 u

$G\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = \varphi(M)G$

$u\left(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = 0$

下上作差得：　$\beta\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = -G\varphi(M)$

发现 $\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = -\frac{G\varphi(M)}{\beta}$ 可整体代入

由☆式得 $u(\vec r_0)$ 再将 $\vec r_0$ 换为 $\vec r$

$u(\vec r) = \iiint_T G(\vec r,\vec r_0)f(\vec r_0)\,d^3\vec r_0 - \frac{1}{\beta}\oiint_\Sigma G(\vec r,\vec r_0)\varphi(M_0)\,dS_0$

$\boxed{\text{由三种表达式，只要确定了 G 即可积分求出 u 的表达式}}$

(3) 第二类边界条件　　$\alpha = 0$

原问题变为 $\begin{cases}\Delta G(\vec r,\vec r_0) = \underset{\text{源}}{\delta(\vec r-\vec r_0)} - \underset{\text{汇}}{\frac{1}{V_T}}\\ \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0\end{cases}$　　不加这一项无解

$u(\vec r) = \iiint_T G(\vec r,\vec r_0)f(\vec r_0)\,d^3\vec r_0 + \frac{1}{V_T}\iiint u(\vec r_0)\,d^3\vec r_0 - \oiint_\Sigma G(\vec r,\vec r_0)\varphi(M_0)\,dS_0$.

下面证明 G 中 $\vec r$ 和 $\vec r_0$ 可互换　（即偶函数）　记住结论即可

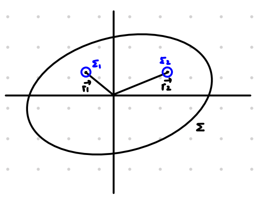
原有公式：$\oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iiint_T (u\Delta v - v\Delta u)\,d^3\vec r$

令 $u = G(\vec r,\vec r_1)$　，　$v = G(\vec r,\vec r_2)$

则 $\Delta u = \delta(\vec r-\vec r_1)$，　$\Delta v = \delta(\vec r-\vec r_2)$

边界条件为 $\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = 0$

$\left(\alpha v + \beta\frac{\partial v}{\partial n}\right)\Big|_\Sigma = 0$



内部无电荷

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iiint_{T-k_1-k_2}(u\Delta v - v\Delta u)\,d^3\vec r = 0$　　增加两个边界，减少两块体积

左边展开：$0 + \oiint_{\Sigma_1}\left(G(\vec r,\vec r_1)\underset{\downarrow 0}{\frac{\partial G(\vec r,\vec r_1)}{\partial n}} - G(\vec r,\vec r_2)\frac{\partial G(\vec r,\vec r_1)}{\partial n}\right)d^2\vec r_1 + \oiint_{\Sigma_2}\left(G(\vec r,\vec r_1)\underset{\downarrow 1}{\frac{\partial G(\vec r,\vec r_1)}{\partial n}} - G(\vec r,\vec r_2)\underset{\downarrow 0}{\frac{\partial G(\vec r,\vec r_1)}{\partial n}}\right)d^2\vec r_2 = 0$　（右边）

利用近似：即　$-G(\vec r_1,\vec r_2) + G(\vec r_2,\vec r_1) = 0$　由此证明了 G 的对称性

总结

$$\Delta u = f(\vec{r})$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = \varphi(M)$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta G(\vec{r}, \vec{r_0}) = \delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

$$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0$$

计算公式:

$$u(\vec{r}) = \iiint_T G(\vec{r}, \vec{r_0}) f(\vec{r_0})\, dV_0 - \iint_{\Sigma} \left[G(\vec{r}, \vec{r_0}) \frac{\partial u(\vec{r_0})}{\partial n_0} - u(\vec{r_0}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r_0})}{\partial n_0} \right] dS_0$$

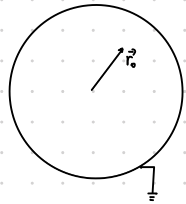
三维无边界的条件下: $G(\vec{r}, \vec{r_0}) = -\dfrac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r_0}|}$

二维无边界的条件下: $G(\vec{r}, \vec{r_0}) = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r_0}|}$

(对应至三维为线电荷)

§ 12.2 用电像法求 Green 函数

$$\boxed{\begin{cases}\Delta G(\vec r,\vec r_0)=\delta(\vec r-\vec r_0)\\ G\,|_{\text{球面}}=0\end{cases}}$$



利用本征函数的思路.

令 $G(\vec r,\vec r_0)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta)$ 代入得:

$\delta(\vec r-\vec r_0)=C\,\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta-1)$ 三维积分 $\iiint\delta(\vec r-\vec r_0)\,r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi=C\int\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta-1)\,r^2dr\,d\cos\theta\,d\varphi$

$$=2\pi C r_0^2$$

$$=1$$

故 $C=\frac{1}{2\pi r_0^2}$ 即 $\delta(\vec r-\vec r_0)=\frac{1}{2\pi r_0^2}\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta-1)$

两边都用 P_l 展开

则原始方程为: $\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r_0^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right)\Big|_{r_0-}^{r_0+}-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r)\right]P_l(\cos\theta)=\delta(\vec r-\vec r_0)=\frac{1}{2\pi r_0^2}\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta-1)$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}B_l(r)P_l(\cos\theta)$$ 转化

其中 $B_l=\frac{2l+1}{2}\frac{1}{2\pi r_0^2}\delta(r-r_0)\underbrace{\int_{-1}^{1}\delta(\cos\theta-1)P_l(\cos\theta)\,d\cos\theta}_{=1}$

对比系数有: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r)=\underset{\text{桥梁}}{B_l}=\frac{2l+1}{4\pi r_0^2}\delta(r-r_0)$

通解为 $\boxed{R_l(r)=A_lr^l+\frac{C_l}{r^{l+1}}+\text{特解}}$

$\int_{r_0-}^{r_0+}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right)-l(l+1)R_l(r)=\int_{r_0-}^{r_0+}\frac{2l+1}{4\pi r_0^2}\cdot r^2\delta(r-r_0)=\frac{2l+1}{4\pi}\delta(r-r_0)$ (存在问题. 思路参考)

$\therefore R_l(r)$ 特解为 $-\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$

由于球内有限解, 故 $C_l=0$ $\therefore R_l(r)=A_lr^l-\frac{2l+1}{4\pi r}$ 代入边界条件 $r=a$ 时 $G=0$. 即 $R_l(a)=0$ 故 $A_l=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{1}{a^{l+1}}$ (Δ)

法二: $G(\vec r-\vec r_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2+2rr_0\cos\theta}}+\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^lP_l(\cos\theta)$

→ 点电荷的部分. 用 Legendre 母函数相关

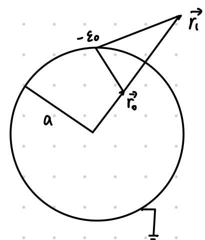
要求 $G|_{r=a}=0$ 可得 A_l

球内电势分布:

$\Delta G(\vec r,\vec r_0)=\delta(\vec r-\vec r_0)$

$G\,|_{\text{球面}}=0$

$\vec r_0$ 和 $\vec r_1$ 在 ε_0 处产生的电势抵消



实际 Green 函数需要叠加

$G(\vec r,\vec r_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}+\frac{1}{4\pi}\frac{a}{r_0}\frac{1}{|\vec r-\vec r_1|}$ $\vec r_1=\left(\frac{a}{r_0}\right)^2\vec r_0$ ($a>r_0$)

如果考虑二维近似 (线电荷)

$G(\vec r,\vec r_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_1|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0}$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left(\frac{a}{r_0}\right)}{|\vec r-\vec r_1|}$$

§ 12.3 含时间的 Green 函数

考虑以下问题：

$$\boxed{\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 \Delta u = f(\vec{r}, t) \\ &\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = \theta(M, t) \\ &u|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ &u_t|_{t=0} = \psi(\vec{r}) \end{aligned}}$$

波动问题

根据 Green 函数性质：

$$f(\vec{r}, t) = \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} f(\vec{r}_0, t_0)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(t - t_0)\, dV_0\, dt_0$$

引入格林函数 G.

方程为 $G_{tt}(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) - a^2 \Delta G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(t - t_0)$

满足齐次边界条件：$\left[\alpha G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) + \beta \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial n}\right]\Big|_{\Sigma} = 0$

初始条件也齐次：$G|_{t=0} = 0$ 且 $G_t|_{t=0} = 0$

$t < t_0$ 时 $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = 0$　　注意时间

此时 $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r}_0, -t_0; \vec{r}, -t)$

必须在调换位置同时加上负号，才能符合时间方向性。

经过推导，计算公式为：

$$u(\vec{r}, t) = \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)\, f(\vec{r}_0, t_0)\, d^3V_0\, dt_0 - \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} \left(G u_{t_0 t_0} - u G_{t_0 t_0}\right) dV_0\, dt_0 + a^2 \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} \left(G \Delta_0 u - u \Delta_0 G\right) dV_0\, dt_0$$

$$= \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)\, f(\vec{r}_0, t_0)\, d^3V_0\, dt_0 - \iiint_T \left[G u_{t_0} - u G_{t_0}\right]_{t_0=0}^{t+\varepsilon} dV_0 + a^2 \iint_\Sigma \int_0^{t+\varepsilon} \left[G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) \frac{\partial u(\vec{r}_0, t_0)}{\partial n_0} - u(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial n_0}\right] dS_0\, dt_0$$

输运问题

$$\boxed{\begin{aligned} &u_t - a^2 \Delta u = f(\vec{r}, t) \\ &\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = \theta(M, t) \\ &u|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \end{aligned}}$$

寻找格林函数 G，满足：

$G_t(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) - a^2 \Delta G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(t - t_0)$

$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0$

初始条件 $G|_{t=0} = 0$

计算公式：

$$u(\vec{r}, t) = \iiint_T \int_0^{t+\varepsilon} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)\, f(\vec{r}_0, t_0)\, d^3V_0\, dt_0 + \iiint_T [G u]_{t_0=0}\, dV_0 + a^2 \iint_\Sigma \int_0^{t+\varepsilon} \left[G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) \frac{\partial u(\vec{r}_0, t_0)}{\partial n_0} - u(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial n_0}\right] dS_0\, dt_0$$

相比泊松方程，不需要减去常数，即可让问题有解。

$$\begin{cases} G_t - a^2 \Delta G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(t - t_0) \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad G|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

接下来求解格林函数 G.

对时间求积分：$\int_{t=t_0-}^{t_0+} \left(G_t - a^2 \Delta G\right) dt = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(t - t_0)\, dt$

由此可得：$G\Big|_{t_0-}^{t_0+} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$　即 $G(\vec{r}, t_0+; \vec{r}, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$t > t_0$ 时，应有 $G_t - a^2 \Delta G = 0$ 且 $\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0$，$G|_{t=t_0+} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

§ 12.4 冲量定理法

令 $\tilde{t} = t - t_0$，显然不影响方程本身，即 $G_{\tilde{t}}(\vec{r}, \tilde{t}; \vec{r}_0, \tilde{t}_0) - a^2 \Delta G(\vec{r}, \tilde{t}; \vec{r}_0, \tilde{t}_0)$　对时间进行变量替换（冲量定理法）

边界与初始条件为：$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0$；$G(\vec{r}, \tilde{t}; \vec{r}_0, \tilde{t}_0)\big|_{\tilde{t}=0^+} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$$\begin{cases} G_t|_{t=t_0+} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ G|_{t=t_0+} = 0 \end{cases}$$

例3. 一维无限空间的有源输运问题

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$　　$-\infty < x < +\infty$

$u|_{t=0} = 0$

① 转成 Green 函数　$G_t - a^2 G_{xx} = \delta(x - x_0)\, \delta(t - t_0)$

$G|_{t=0} = 0$

② 变量替换：$G_{\tilde{t}}(x, \tilde{t}; x_0, t_0) - a^2 G_{xx}(x, \tilde{t}; x_0, t_0) = 0$

$G(x, \tilde{t}; x_0, t_0)\big|_{\tilde{t}=t_0^+} = \delta(x - x_0)$

③ 分离变量：$G = T(\tilde{t}) X(x)$　代入得 $T'(\tilde{t}) X(x) = a^2 T(\tilde{t}) X''(x)$

$\therefore \frac{T'(\tilde{t})}{a^2 T(\tilde{t})} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2$

可得 $X(x) = e^{ikx} + e^{-ikx}$

$T(\tilde{t}) = c(k) e^{-k^2 a^2 t}$ ⟶ $G = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-k^2 a^2 t} \cdot e^{ikx}\, dk$

⟶ 再利用初始条件

$\int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{ikx}\, dk = \delta(x - x_0)$

对 $e^{-ik'x}$ 积分：

$\iint C(k) e^{ikx} e^{-ik'x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) e^{-ik'x}\, dx$

$= e^{-ik'x_0}$

第十三章 积分变换法求解偏微分方程

偏微分方程 $\xrightarrow{\text{积分变换}}$ 简单方程 / 常微分方程 / 代数方程 $\xrightarrow{\text{求解}}$ 新方程的解

新方程的解 $\xrightarrow{\text{逆变换}}$ 原方程的解

偏微分方程 ⇣ 原方程的解

§ 13.1 傅里叶变换 （主要适用 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的无界空间）

$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ikx}dk$ 引入定义 逆变换

则有 $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx$ 变换 $\longrightarrow$ 三维空间: $F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r}$

$\boxed{\text{性质回顾 Fourier Tranformation}}$

(1) 导数定理

$\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(k)$

$\mathcal{F}[f'(x)] = ikF(k)$ 导数的 FT 相当于像函数乘上 ik

(2) 积分定理

$\mathcal{F}\left[\int_0^x f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{ik}F(k)$ 积分的 FT 相当于像函数除以 ik

(3) 相似定理

$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{k}{a}\right)$

(4) 延迟定理

$\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0}F(k)$ 原函数加减

(5) 位移定理

$\mathcal{F}[e^{ik_0x}f(x)] = F(k-k_0)$ 像函数加减

(6) 卷积定理

定义卷积 $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$

则有 $\mathcal{F}[f_1(x)*f_2(x)] = F_1(k)\cdot F_2(k)$ 原函数卷积 $\longrightarrow$ 像函数乘积

$\boxed{\text{例题}}$ 求解无限长弦的自由振动

$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$

$u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$

解: $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(k,t)e^{ikx}dk$ 傅里叶变换 ?

代入偏微分方程: $\int_{-\infty}^{+\infty} U_{tt}(k,t)e^{ikx}dk + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2k^2U(k,t)e^{ikx}dk = 0$

即有 $U_{tt}(k,t) + a^2k^2U(k,t) = 0$

通解为 $U(k,t) = A(k)e^{ikat} + B(k)e^{-ikat}$

又有初始条件变为: $U(k,t)|_{t=0} = \bar{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ikx}dx$

$U_t(k,t)|_{t=0} = \bar{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx$

因此有: $A(k)+B(k) = \bar{\varphi}(k)$ $\longrightarrow$ $A(k) = \frac{1}{2}\bar{\varphi}(k) + \frac{1}{2aik}\bar{\psi}(k)$

$A(k)-B(k) = \frac{\bar{\psi}(k)}{iak}$. $\longrightarrow$ $B(k) = \frac{1}{2}\bar{\varphi}(k) - \frac{1}{2aik}\bar{\psi}(k)$

$\therefore U(k,t)$ 已知

最后 $u(x,t) =$ 傅里叶逆变换 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{1}{2}\bar{\varphi}(k)+\frac{1}{2iak}\bar{\psi}(k)\right]e^{iakt} + \left[\frac{1}{2}\bar{\varphi}(k)-\frac{1}{2iak}\bar{\psi}(k)\right]e^{-iakt}\right\}e^{ikx}dk$

$=$ 分拆为4项

$= \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi$

$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$. 即为达朗贝尔公式

↓ 三维

三维问题

若变为三维无界空间. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \iiint\limits_{T}$ $x \longrightarrow \vec{V}$ 其余过程类似

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{16\pi^3}\left\{ \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} d^3\vec{r}'(e^{ikat}+e^{-ikat}) + \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\frac{1}{iak}(e^{iakt}-e^{-iakt})\right\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k}$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\iiint \varphi(\vec{r}')\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{4\pi^2}(e^{iakt}-e^{-iakt})e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{k}\,d^3\vec{r}'\right] + \frac{1}{4\pi a}\iiint \varphi(\vec{r}')\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2 ik}(e^{iakt}-e^{-iakt})e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{k}\,d^3\vec{r}'\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')\left[\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\right]\mathrm{d}V' +$$

$$\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')\left[\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\right]\mathrm{d}V'.$$

引用 §5.3 例 1 结果，

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}V' +$$

$$\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}V'.$$

应用延迟定理，

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)\mathrm{d}V' +$$

$$\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)\mathrm{d}V'.$$

利用相关性质：

$$F\left[\frac{1}{r}\delta(r-c)\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint \frac{1}{r}\delta(r-c)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}(e^{ikc}-e^{-ikc})$$

由于被积式中出现 $\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)$，对 $\boldsymbol{r}'$ 的积分只需在球面 S'_{at} 上进行，S'_{at} 以点 $\boldsymbol{r}$(确切地说，径矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点)为球心，而半径为 at.

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S'_{at}}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{at}\mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S'_{at}}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{at}\mathrm{d}S', \tag{13.1.4}$$

式中 $\mathrm{d}S'$ 是球面 S'_{at} 的面积元 . (13.1.4)式称为泊松公式.

推迟势例题 (非齐次)

例 7 推迟势. 求解三维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_3 u=f(\boldsymbol{r},t), \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 作傅里叶变换，问题变换为非齐次常微分方程的初始值问题

$$\begin{cases} U''+k^2a^2U=F(t;\boldsymbol{k}), \\ U|_{t=0}=0,\ U'|_{t=0}=0. \end{cases}$$

这个问题的解是(参见 §6.3 习题 7 答案)

$$U(t;\boldsymbol{k})=\frac{1}{2a\mathrm{i}k}\int_0^t F(\tau;\boldsymbol{k})[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau.$$

然后对 $U(t;\boldsymbol{k})$ 进行逆傅里叶变换 .

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\mathrm{i}k}\int_0^t F(\tau;\boldsymbol{k})[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka(t-\tau)}]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka(t-\tau)}]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}V'.$$

引用 §5.3 例 1 的结果，并应用延迟定理，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V'.$$

再引用(5.3.5)以及关系式 $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(t-\tau-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'.$$

本问题的 $f(\boldsymbol{r},t)$ 中的 $t\geqslant 0$，所以上面这个积分其实不必在无界空间进行，只需在条件 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a\geqslant 0$ 下积分．换句话说，对 $\boldsymbol{r}'$ 的积分只需在球体 T'_{at} 中进行，此球的球心为矢径 $\boldsymbol{r}$，而半径为 at. 这样，

$$t > \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{at}$$

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T'_{at}}\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'. \tag{13.1.5}$$

值得注意的是 f 的宗量 t 换成了 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a$. 这是可以理解的，既然扰动以速度 a 传播，从点 $\boldsymbol{r}'$ 出发的扰动，如果在时刻 t 对点 $\boldsymbol{r}$ 产生影响，必然是在时刻 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a$ 出发的．为了强调这种时间差异，通常将 $f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)$ 记作 $[f]$. 于是(13.1.5)又可写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T'_{at}}\frac{[f]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V', \tag{13.1.6}$$

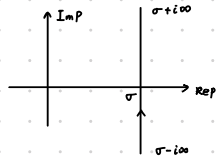
§ 13.2 拉普拉斯变换求解偏微分方程 (主要适用 0 到 ∞ 的半无界空间)

定义回顾

$\mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \equiv \bar{f}(p)$ 正变换 (时间空间 ⟶ 频率空间)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt}dp$ 逆变换，此时对 p 沿虚轴积分.

可积性要求明显降低



σ要足够大使得所有奇点都落在路径的左侧

$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

性质:

(1) 导数定理

$\mathcal{L}[f'(t)] = p\bar{f}(p) - f(0)$

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

记忆方法: p的幂次与 $\varphi^{(n)}$ 阶数和为 n-1
且 $\mathcal{L}[\varphi(t)]$ 视为-1次，从 $p^n\mathcal{L}[\varphi(t)]$ 开始

(2) 积分定理

$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{p}\bar{f}(p)$

(3) 相似定理

$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$

(4) 位移定理

$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}f(t)] = \bar{f}(p+\lambda)$

像函数 p变为 p+λ. ⟶ 常用于整体代换
原函数多一个 $e^{-\lambda t}$

(5) 延迟定理

$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}\bar{f}(p)$

像函数多一个 $e^{-\tau p}$
原函数 t 变为 t-τ

必须 t > τ

注意: $f(t) \longrightarrow f(t)H(t)$

代入 t-τ 则变为 $f(t-\tau)H(t-\tau)$ 只在 t > τ 才有值，逆变换有影响

(6) 卷积定理

定义卷积 $f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$

$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \bar{f}_1(p)\cdot\bar{f}_2(p)$

(7) 初值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(p)$ 且 $\lim_{p\to\infty} p\bar{f}(p)$ 存在，则 $f(0) = \lim_{p\to\infty} p\bar{f}(p)$

(8) 终值定理

$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = p\bar{f}(p) - f(0)$ 导数定理

考虑 $\lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f'(t)dt$

$= f(\infty) - f(0)$

$= p\bar{f}(p) - f(0)$

可以不经过逆变换而直接得出答案

$\therefore f(\infty) = \lim_{p\to 0} p\bar{f}(p)$

例1. $\bar{f}(p) = \frac{1.06}{p\{p(p+1)(p+2)+1.06\}}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = 1 - 0.351e^{-0.634t} - 2e^{-1.183t}[0.324\cos(0.746t) - 0.215\sin(0.746t)]$

$f(\infty) = \lim_{p\to 0} p\bar{f}(p) = \lim \frac{1.06}{p(p+1)(p+2)+1.06} = 1$ 显然与上式相符

补充结论: $\mathcal{L}[\sin wt] = \frac{w}{p^2+w^2}$, $\mathcal{L}[\cos wt] = \frac{p}{p^2+w^2}$

$\mathcal{L}[\mathrm{sh}\,wt] = \frac{w}{p^2-w^2}$ $\mathcal{L}[\mathrm{ch}\,wt] = \frac{p}{p^2-w^2}$

可以用欧拉公式变换后，利用上面公式

例 2.

波动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(\vec{r}, t) \\ u|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \\ u_t|_{t=0} = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

$$U_{tt}(\vec{k}, t) - a^2 k^2 U(\vec{k}, t) = F(\vec{k}, t)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$

$$U(\vec{k}, t)|_{t=0} = 0$$

$$U_t(\vec{k}, t)|_{t=0} = 0$$

对于空间作 Fourier 变换

对于时间作 Laplace 变换：

$$p^2 \bar{U}(\vec{k}, p) + a^2 k^2 \bar{U}(\vec{k}, p) = \bar{F}(\vec{k}, p)$$ 实际导数定理还要减项，只是其他项为0

$$\bar{U}(\vec{k}, p) = \frac{\bar{F}(\vec{k}, p)}{p^2 + a^2 k^2} = \frac{ak \bar{F}(\vec{k}, p)}{ak(p^2 + a^2 k^2)}$$ 利用卷积

或 $= \frac{\bar{F}(\vec{k}, p)}{(p + iak)(p - iak)}$ 再分拆

$$U(\vec{k}, t) = \frac{1}{2aik} \int_0^t F(\vec{k}, t) \left[e^{iak(t-\tau)} - e^{-iak(t-\tau)} \right] d\tau$$

再进行 Fourier 逆变换

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{r}' \int_0^t f(\vec{r}', t) \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{4\pi i a k} \left[e^{iak(t-\tau)} - e^{-iak(t-\tau)} \right] d\tau \cdot e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3\vec{k}$$

最终结果 $= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint \frac{f\left(r', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$

例 3. 限定源扩散，总粒子数 N_0 u 指密度

$$u_t - D u_{xx} = 0$$

$$u|_{t=0} = 2N_0 \delta(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

补充法 2： $u(x, t) = \alpha(t) e^{-\beta(t) x^2}$

应具有对称性、指数衰减性

对方程作 Fourier 变换：

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k, t) e^{ikx} dk$$

$$U_t(k, t) + k^2 D U(k, t) = 0$$

则有 $U(k, t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2N_0 \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi}}$

$U(k, t) = C(k) e^{-k^2 D t}$ 则有 $C(k) = \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi}}$ $\therefore U(k, t)$ 已知

$$\therefore u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 D t} e^{ikx} dk$$

$$= \frac{N_0}{\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \frac{1}{\sqrt{Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{Dt})^2 \left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)^2} d\left(\sqrt{Dt}\left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)\right)$$

$$= \frac{N_0}{\sqrt{D\pi t}} e^{-x^2/4Dt}.$$

第十四章 保角变换（共形变换）

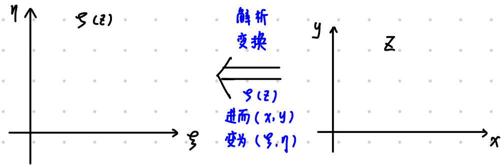
Conformed Transformation

求解非齐次偏微分方程

$\Delta u = f(\vec{r})$

$(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u)|_{\Sigma} = \varphi(M)$

- 本征函数法
- 格林函数法
- 特殊变换法



二维情况下：$u(x,y)$ 经过一个解析变换 $\zeta(z)$

方程由 $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ 变为 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\tilde{f}(\xi,\eta)$

并且边界条件能够简单化

只能够适用于二维情形问题

对于解析函数 $\zeta(z)$

$$\zeta'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\zeta(z+\Delta z)-\zeta(z)}{\Delta z} = \frac{\partial \xi}{\partial x}+i\frac{\partial \eta}{\partial x} = -i\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

虚部实部对应相等 $\therefore \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$ （C-R条件）

再分别对 x. y 求偏导可得：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\xi(x,y),\eta(x,y))}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial(u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x)}{\partial \xi}\xi_x+\frac{\partial(u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x)}{\partial \eta}\cdot\eta_x$$

$$=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2+u_{\eta\xi}\,\eta_x\xi_x+u_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x^2$$

同理得 $u_{yy}(\xi,\eta)$

代入原方程得：

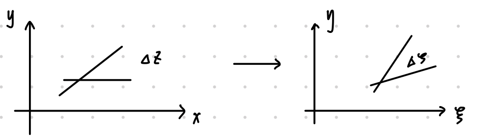
$$(\xi_x^2+\xi_y^2)u_{\xi\xi}+2(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)u_{\xi\eta}+(\eta_x^2+\eta_y^2)u_{\eta\eta}$$

整理得 $(\xi_{xx}+\xi_{yy})u_\xi+(\eta_{xx}+\eta_{yy})u_\eta=f(\xi,\eta)$

也就是 $|\zeta'(z)|^2\{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}\}=f(\xi,\eta)$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{1}{|\zeta'(z)|^2}f(\xi,\eta)$$

泊松方程形式不变



$\Delta z=|\Delta z|e^{i\arg\Delta z}$ （辐角）　　$\Delta \zeta=|\Delta\zeta|e^{i\arg\Delta\zeta}$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\zeta'(z)=\left|\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}\right|e^{i(\arg\Delta\zeta-\arg\Delta z)}$$

z平面两条曲线相交，映射至ζ平面内尽管两条曲线发生变化，但夹角保持不变，故称为保角变换

ζ是一个解析函数

$\zeta'(z)=0$ 的点无意义，也不一定保角

黎曼定理：任意一个单连通区域必可通过某个保角变换变为另一个任意给定的单连通区域

§14.2 常用的保角变换

(一) 线性变换

$\zeta(z) = az+b$ (a.b为复常数)

$= a(z+\frac{b}{a}) = |a|e^{i\arg a}(z+\frac{b}{a})$ $\boxed{\text{平移. 旋转. 放缩 （不改变形状）}}$

$\zeta'(z) = a = |a|e^{i\arg a}$

(二) 幂函数和根式变换

$\zeta(z) = z^n$ $\qquad z = |z|e^{i\arg z}$

$\zeta'(z) = nz^{n-1}$ $\qquad \therefore \zeta(z) = |z|^n e^{in\cdot\arg z}$

对于根式变换: $\zeta(z) = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$

同理可得.

$z=0$ 时 $\zeta'(z)=0$, 此处夹角改变

$\zeta'(z)\neq 0$ 处夹角不能改变

例1:

例1 一个甚大金属导体，挖去一个二面角，角的大小为60°(图14-3). 将导体充电到电势V_0，试求二面角内电场中的电势分布.

解 将导体看作无限长，只须在任一垂直于图14-3中柱轴的横截面内研究，将这横截面称为z平面. 在z平面上，二面角表现为顶角$\pi/3$的角域(图14-4).

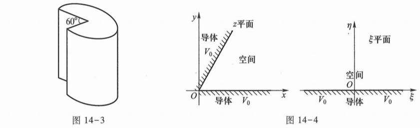


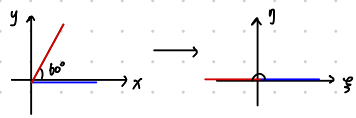
图14-3 图14-4

将顶角放大到三倍则成为π，而顶角为π的角域即半平面，问题容易解得多.

不妨取 $\zeta(z) = z^3$.

分析 x.y 轴下的两条线如何变化

$\zeta(z) = (x+iy)^3$.



$\zeta(z) = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3$.

$\boxed{u = V_0 + C(3x^2y - y^3)}$

例2. 速度势 $u(x,y)$

速度 $\vec{v} = \nabla u$

由于 $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ $\therefore$ $\Delta u = 0$ 为速度势的条件

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

河水过坝问题如右图所示

经过 $z_1(z) = z^2$ 的一个变换. x轴为实轴. y轴为虚轴

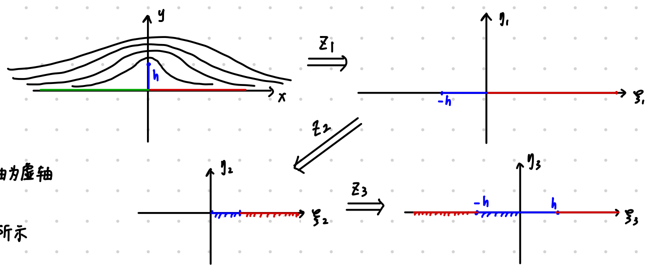
再经过 $z_2(z_1) = z_1 + h^2$ 的变换

再经过 $z_3(z) = \sqrt{z_2} = \sqrt{z^2+h^2}$ 的变换, 如右图所示

综合来看 $\zeta(z) = \sqrt{(x+iy)^2+h^2} = \xi + i\eta$

展开后对应相等. $\xi = \frac{xy}{\eta}$. $\eta = \sqrt{\frac{(x^2-y^2+h^2)+\sqrt{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}}{2}}$

$u = V_0 + C\eta$ 并且 $\vec{v} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e_y}$



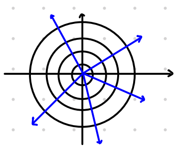
(三) 指数函数和对数函数变换

$\zeta(z) = e^z = e^{x+iy} = \underset{\text{模}}{e^x}\cdot\underset{\text{幅角}}{e^{iy}}$

等x线变为原点为圆心的圆. 随x变化大小

($x=0$ 为单位圆)

等y线变为原点发出的射线



$\zeta(z) = \ln z$

$z = |z|e^{i\arg z}$

$\therefore \zeta(z) = \ln|z| + i\arg z$

即模的对数变为实部. 辐角变为虚部.

(四) 反演变换

$$\zeta(z) = \frac{R^2}{z} = \frac{R^2}{|z|} e^{-i \cdot \arg z}$$ 即为关于 x 轴的反演

☆ (五) 分式线性变换 （综合了一. 四变换）

$$\zeta(z) = \frac{az-b}{cz-d} = \frac{a}{c} \frac{z-\frac{b}{a}}{z-\frac{d}{c}}$$ $(ad-bc \neq 0)$ 否则平面所有点变为 $\zeta = \frac{a}{c}$ 一個点，没有意义

分式线性变换具有 保圆性 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \longrightarrow (\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2=\tilde{R}^2$

并且对于圆的对称点保持为对称点

(直线作为圆的特例)

* (六) 儒阔夫斯基函数

$$\zeta(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$ 椭圆 ⟶ 圆

* (七) 施瓦兹 - 克利斯多菲变换

多角形 ⟶ 直线